Una variable aleatoria X es Poisson(μ) si $P(X = k) = e^{-\mu}\mu^k/k!$, para $k \geq 0$ entero.

1. Demuestre que si X es Poisson(μ), entonces $EX = \mu$, $E(X^2 - \mu) = \mu$.

2. Calcule la función generadora de momentos $E(z^X)$ para $|z| \leq 1$.

3. Calcule $E(X!/k!)$, para $k \geq 0$ entero.

4. Calcule $\frac{dP(X=k)}{d\mu}$ y $\frac{d\sum_{k=0}^{n} P(X=k)}{d\mu}$.

5. Sea $X \sim$ Poisson(μ) e $Y \sim$ Poisson(λ), independientes. Calcule la distribución de $X + Y$.

6. Sean $\mu_1, \mu_2, \ldots$ una sucesión de parámetros positivos y $X_1, X_2, \ldots$ variables independientes con $X_i \sim$ Poisson(μ_i). Demuestre que si $\sigma = \sum_i \mu_i < \infty$ y

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

   entonces S_n converge casi seguramente a $S \sim$ Poisson(σ).

   Si $\sigma = \infty$, entonces S_n converge a ∞ casi seguramente.

7. En las condiciones del teorema anterior, demuestre que si $k_1 + \cdots + k_n = k$ (todos no negativos), entonces

$$P(X_1 = k_1, \ldots, X_n = k_n \,|\, S_n = k) = \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \left(\frac{\mu_1}{\mu}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{\mu_n}{\mu}\right)^{k_n} \tag{2}$$

   donde $\mu := \mu_1 + \cdots + \mu_n$. Es decir, distribución Multinomial($k; \frac{\mu_1}{\mu}, \ldots, \frac{\mu_n}{\mu}$).

8. Recíproca. Supongamos que $(X_{k,1}, \ldots, X_{k,n}) \sim$ Multinomial($k; p_1, \ldots, p_n$) y $K \sim$ Poisson(λ). Entonces

$$X_{K,1}, \ldots, X_{K,n} \text{ son variables independientes con } X_{K,i} \sim \text{Poisson}(\lambda p_i). \tag{3}$$