# Práctica 3: El teorema de los núros primos y sus consecuencias

**Ejercicio 1.** Si $p_n$ denota al $n$-ésimo número primo, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ cuando $x \to +\infty$

ii) $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$ cuando $x \to +\infty$ donde $\mathrm{Li}(x)$ denota la función "logartimo integral´´ definida por: $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{n \log p_n} = 1$

iv) $p_n \sim n \log n$ cuando $n \to +\infty$.

**Ejercicio 2.** Probar que las siguientes fórmulas son válidas para $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = s \int_1^\infty \frac{\pi(x)}{x^{s+1}}\, dx, \quad \frac{1}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{M(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

$$\log \zeta(s) = s \int_1^\infty \frac{\pi(x)}{x(x^s - 1)}\, dx$$

(Precisar cuál es el significado de esta última fórmula para $s$ complejo)

**Ejercicio 3.** Definimos las funciones

$$M(x) = \sum_{n\le x} \mu(n), \quad H(x) = \sum_{n \le x} \log n \mu(n)$$

i) Probar que

$$\lim_{x\to+\infty} \left( \frac{M(x)}{x} - \frac{H(x)}{x \log x} \right) = 0$$

Sugerencia: utilizar la fórmula de sumación de Abel para relacionar los valores de $H(x)$ y $M(x)$.

ii) Probar la fórmula:

$$H(x) = -\sum_{n\le x} \mu(n) \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

iii) Probar que el teorema de los números primos (en la forma $\psi(x) \sim x$) implica que $H(x) = o(x \log x)$. Sugerencia: separar la suma anterior en dos partes, según el valor de $x/n$ sea grande o pequeño.

iv) Concluir que el teorema de los números primos implica que $M(x) = o(x)$.

**Ejercicio 4.**

i) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función aritmética multiplicativa tal que si $p$ es primo:

$$f(p^k) \to 0 \text{ cuando } p^k \to 0$$

(Es decir: dado $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon)$ tal que $|f(p^k)| < \varepsilon$ si $p^k > N(\varepsilon)$. Probar que $f(n) \to 0$ cuando $n \to +\infty$. [Sugerencia: Existe una constante $A$ tal que $|f(p^k)| < A$ para todos los primos $p$ y $k \geq 0$, y otra constante $B$ tal que $|f(p^k)| < 1$ si $p^k > B$].

ii) Sea para $\alpha \geq 0$, $\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n} d^\alpha$. Probar que para cada $\delta > 0$,

$$\sigma_\alpha(n) = o(n^{\alpha+\delta})$$

**Ejercicio 5.** Chebyshev probó en 1851 que si el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

existía, debía ser igual a 1. En el ejercicio 7 de la práctica 2 esbozamos una demostración. Este ejercicio propone una demostración alternativa de esta fórmula basada en la identidad:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_1^\infty \frac{\psi(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

(válida si $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$).

i) Sea $L = \limsup_{x\to+\infty} \psi(x)/x$. Dado $\varepsilon > 0$ elegimos $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tal que si $x \geq x_0$ entonces $\psi(x) \leq (L+\varepsilon)$. Considerando valores reales de $s$ con $1 \leq s \leq 2$, partir la integral como $\int_1^{x_0} + \int_{x_0}^\infty$ y estimar cada sumando, a fin de obtener la desigualdad:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leq C(\varepsilon) + \frac{s(L+\varepsilon)}{s-1}$$

donde $C(\varepsilon)$ es independiente de $\varepsilon$. Deducir que $L \geq 1$.

ii) Llamando $l = \liminf_{x\to+\infty} \psi(x)/x$ utilizar un argumento similar para probar que $l \leq 1$.

iii) Concluir que si el cociente $\psi(x)/x$ tiende a un límite cuando $x \to +\infty$, dicho límite debe ser 1.

**Ejercicio 6.**

i) Utilizando los teoremas tauberianos vistos en clase, probar que la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{\theta(x) - x}{x^2}\, dx$$

es convergente.

ii) Deducir el teorema de los números primos en la forma: $\theta(x) \sim x$ cuando $x \to +\infty$.

**Ejercicio 7.**

i) Probar que

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6}\frac{\sigma(n)}{n} \text{ si } n \geq 2$$

ii) Si $x \geq 2$, probar que:

$$\sum_{n \leq x} \frac{n}{\varphi(n)} = O(x)$$

iii) Probar que existe una constante $c > 0$ tal que:

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{\sigma(n)}{n \log \log n} = c$$

**Ejercicio 8.** Sea $q \geq 1$ y $a$ coprimo con $q$. Notamos: $\pi(x, q, a) =$ cantidad de números primos $p \leq x$ tales que $p \equiv a \pmod{q}$. Y pongamos:

$$\theta(x, q, a) = \sum_{p \leq x, p \equiv a \pmod{q}} \log p, \quad \psi(x, q, a) = \sum_{n \leq x, n \equiv a \pmod{q}} \Lambda(n)$$

Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes cuando $x \to +\infty$:

i) Para todo $q \geq 1$ y todo $a$ coprimo con $q$, $\pi(x, q, a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{\log x}$ (teorema de los números primos para progresiones aritméticas).

ii) Para todo $q \geq 1$ y cualquier $a_1$ y $a_2$ coprimos con $q$, se tiene que: $\pi(x, q, a_1) \sim \pi(x, q, a_2)$; y $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

iii) Para todo $q \geq 1$ y todo $a$ coprimo con $q$, $\theta(x, q, a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} x$.

iv) Para todo $q \geq 1$ y $a$ coprimo con $q$, $\psi(x, q, a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} x$.