Práctica 2: Medias de Funciones Aritméticas

Ejercicio 1. Utilizando la fórmula de sumación de Euler, deducir las siguientes formulas asintóticas para $x \geq 2$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$\sum_{2 \leq n \leq n} \frac{1}{n \log n} = \log(\log x) + B + O\left(\frac{1}{x \log}\right)$$

Ejercicio 2.

i) Para $x \geq 2$, probar que

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n} = \frac{1}{2} \log^2 x + 2\gamma \log x + O(1)$$

donde γ es la constante de Euler.

ii) Si $x \geq 2$ y $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ probar que

$$\sum_{n \leq x} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \frac{x^{1-\alpha} \log x}{1 - \alpha} + \zeta(\alpha)^2 + O(x^{1-\alpha})$$

Ejercicio 3.

i) Para $x \geq 1$ probar que:

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log x)$$

ii) Para $\alpha > 0, \alpha \neq 1$:

$$\sum_{n \leq x} \sigma_\alpha(n) = \frac{\zeta(\alpha + 1)}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + O(x^\beta) \text{ con } \beta = \text{máx}(1, \alpha)$$

Ejercicio 4.

i) Probar que si $x \geq 1$:

$$\sum_{n \leq x} \frac{\varphi(n)}{n} = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \left[\frac{x}{n}\right]$$

ii) Deducir la siguiente fórmulas asintótica:

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n}=\frac{x}{\zeta(2)}+O(\log x)$$

Ejercicio 5. Si $x\geq 2$ probar que

$$\sum_{n\leq x}\frac{\varphi(n)}{n^2}=\frac{1}{\zeta(2)}\log x+\frac{\gamma}{\zeta(2)}+A+O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

donde γ es la constante de Euler y

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\log n}{n^2}$$

¿Cómo se puede expresar A en términos de la función zeta de Riemann?

Ejercicio 6. La función zeta de Hurwitz es una generalización de la función zeta de Riemann que se define para $a\in\mathbb{R}$, $0<a\leq 1$ y $\mathrm{Res}(s)>1$ por:

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s}$$

(Observamos que $\zeta(s,1)=\zeta(s)$).

1. Probar que $\zeta(s,a)$ es una función analítica de s en el semiplano $\mathrm{Re}(s)>1$.
2. Encontrar una fórmula asintótica para las sumas parciales

   $$\sum_{n\leq x}\frac{1}{(n+a)^s}$$

   válida para $s>1$.
3. Probar que la función zeta de Hurwitz puede extenderse a una función analítica en el semiplano $\mathrm{Re}(s)>0$ salvo un polo simple en $s=1$ con residuo 1.

Ejercicio 7. Chebyshev probó en 1851 que si el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{x}$$

existía, debía ser igual a 1. Este ejercicio esboza una demostración simple basada en la fórmula asintótica

$$\sum_{n\leq x}\psi\left(\frac{x}{n}\right)=x\log x+O(x)\qquad(*)$$

i) Sea $L = \limsup_{x\to+\infty} \psi(x)/x$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos un $N = N(\varepsilon)$ tal que si $x \geq N$, entonces $\psi(x) \leq (L+\varepsilon)x$. Descomponer la suma en $(*)$ en dos partes, y estimar cada una de ellas a fin de obtener la desigualdad:

$$\sum_{n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \leq (L+\varepsilon)x\log x + x\psi(N)$$

Comparando con $(*)$ deducir que $L \geq 1$.

ii) Sea $l = \liminf_{x\to+\infty} \psi(x)/x$. Probar por un argumento análogo al de *i*), que $l \leq 1$.

iii) Deducir que si el límite del cociente $\psi(x)/x$ cuando $x \to +\infty$ existe, debe ser 1.

iv) Probar que lo mismo sucede con el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

Ejercicio 8. Designamos por $Q(x)$ la cantidad de números naturales menores o iguales que x que son libres de cuadrados (esto es: no son divisibles por el cuadrado de un primo). Probar que:

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$$

Sugerencia: utilizar la identidad

$$|\mu(n)| = \sum_{d^2|n} \mu(d)$$

Observación: En particular se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{Q(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2}$$

Este resultado puede interpretarse como diciendo que la probabilidad de que un entero elegido al azar sea libre de cuadrados es $\frac{6}{\pi^2}$.

Ejercicio 9.

i) Sea $r_2(n)$ el número de representaciones de n en la forma $n = a^2 + b^2$ con $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que:

$$\sum_{n\leq x} r_2(n) = \pi x + O(\sqrt{x})$$

Sugerencia: Interpretar la suma del primer miembro como la cantidad de puntos de cordenadas pertenecientes al círculo de radio $\sqrt{x}$, menos 1.

ii) (**ejercicio optativo: sólo para los que cursaron Ecuaciones Diferenciales o Matemática 4**, para ilustrar una conexión entre la teoría de números y las ecuaciones diferenciales). Sea $\Omega = (0, L) \times (0, L)$ un cuadrado de lado L, y consideremos el problema de autovalores:

$$\left\{ \begin{array}{ccll} -\Delta u_n & = & \lambda_n u_n & \text{en} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{array} \right.$$

Notamos $N(\lambda) = \#\{n \in \mathbb{N} : \lambda_n \leq \lambda\}$ a la función de conteo de autovalores. Encontrar una fórmula asintótica para $N(\lambda)$. ¿Qué sucede si $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$ es un rectángulo ?