Práctica 1: Funciones Aritméticas

Notaciones:
$\varphi(n)$ = función φ de Euler
$\mu(n)$ = función μ de Möbius.
$d(n)$ = = número de divisores (positivos) de n.
$\sigma(n)$ = = suma de los divisores (positivos) de n.
$\nu(n)$ = número de factores primos diferentes de n
$\kappa(n) = a_1 a_2 \ldots a_k$ si $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$
$\lambda(n)$ = función de Liouville $(= (-1)^{a_1+a_2+\ldots+a_k})$

Ejercicio 1. Probar que

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

Ejercicio 2. Probar que $d(n)$ es impar si y sólo si n es un cuadrado.

Ejercicio 3. Probar que

$$\sum_{t|n} d(t)^3 = \left(\sum_{t|n} d(t) \right)^2$$

Ejercicio 4. (Forma producto de la fórmula de inversión de Möbius) Si $f, g, a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ son funciones aritméticas, $f(n) > 0$ y $a(1) \neq 0$, probar que

$$g(n) = \prod_{d|n} f(d)^{a(n/d)} \text{ si y sólo si } f(n) = \prod_{d|n} g(d)^{b(n/d)}$$

donde $b = a^{-1}$ es la inversa de Dirichlet de a, es decir que $a * b = I$.

Ejercicio 5. Probar que

$$\prod_{t|n} t = n^{d(n)/2}$$

Ejercicio 6. Sea $\varphi_k(n)$ la suma de las potencias k-ésimas de los números menores o iguales que n y coprimos con n. Observemos que $\varphi_0(n) = \varphi(n)$.

i) Probar que:

$$\sum_{d|n} \frac{\varphi_k(d)}{d^k} = \frac{1^k + \ldots + n^k}{n^k}$$

ii) Invirtiendo esta fórmula probar que para $n > 1$,

$$\varphi_1(n) = \frac{1}{2} n\varphi(n), \quad \varphi_2(n) = \frac{1}{3}\varphi(n)n^2 + \frac{n}{6}\prod_{p|n}(1-p)$$

Deducir una fórmula que corresponda a $\varphi_3(n)$.

Ejercicio 7. La indicatriz de Jordan es una generalización de la indicatriz de Euler definida por:

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n}(1-p^{-k})$$

Probar las fórmulas

$$J_k(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\left(\frac{n}{d}\right)^k, \quad n^k = \sum_{d|n} J_k(d)$$

Ejercicio 8. Se dice que un número n es perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios, es decir si $\sigma(n) = 2n$.

i) (Euclides) Probar que si $2^a - 1$ es primo, entonces $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ es perfecto.

ii) Probar que si n es par y perfecto, entonces $n = 2^{a-1}(2^a - 1)$ para algún $a \geq 2$.

Nota: Es un problema abierto decidir si existen numeros impares perfectos. Pero sabemos que no existen impares perfectos con menos de 9 factores primos (12 si 3 no es uno de ellos)[1]..

Ejercicio 9. Sea $G_k = \{z \in \mathbb{C} : z^k = 1\}$ el conjunto de las raices k-ésimas de la unidad, y sea G_k^* el subconjunto de las raices primitivas k-ésimas. La suma

$$c_k(n) = \sum_{\omega \in G_k^*} \omega^n = \sum_{m=1,(m,k)=1}^{k} e^{2\pi imn/k}$$

se conoce como suma de Ramanujan y tiene notables propiedades aritméticas.

i) Probar que:

$$c_k(1) = \mu(k), \quad c_k(n) = \sum_{d|(n,k)} d\mu\left(\frac{k}{d}\right)$$

Sugerencia: Calcular

$$\sum_{d|n} c_d(n)$$

[1] Pace P. Nielsen: *Odd perfect numbers have at least nine distinct prime factors.* Math. Comp. 76(260):2109-2126, 2007

ii) Probar la siguientes propiedad multiplicativas de las sumas de Ramanujan:

$$c_{mk}(ab) = c_m(a)c_k(b) \text{ si } (a,k) = (b,m) = (m,k) = 1$$

En particular:

$$c_m(ab) = c_m(a) \text{ si } (b,m) = 1$$

$$c_{mk}(a) = c_m(a)\mu(k) \text{ si } (a,k) = (m,k) = 1$$

Ejercicio 10. Para $n \in \mathbb{N}$, definimis el n-ésimo polinomio ciclotómico. por:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\omega \in G_n^*} (x - \omega)$$

i) Demostrar que

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

ii) Deducir que $\Phi_n(x)$ es un polinomio mónico de grado $\varphi(n)$ con coeficientes enteros.

iii) Encontrar la expresión de $\Phi_n(x)$ para $n = p$, $n = 2p$ y $n = 4p$ (p es primo).

iv) Probar que:

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

v) Si $\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\varphi(n)} a_k(n) x^d$, probar que

$$a_{\varphi(n)-k}(n) = a_k(n), \quad a_1(n) = a_{\varphi(n)-1}(n) = \mu(n) \text{ para } n > 1$$

Ejermplos de funciones generatrices

Ejercicio 11. Probar que las siguientes fórmulas son válidas si $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$:

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)}, \quad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(n)}{n^s} = \zeta(s) \sum_p \frac{1}{p^s}, \quad \text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}$$

$$\text{iv)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\nu(n)}\lambda(n)}{n^s} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta^2(s)}, \quad \text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(2s)\zeta(3s)}{\zeta(6s)}, \quad \text{vi)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\nu(n)}\kappa(n)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(3s)}$$