Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 7

1. Otro teorema de Mertens

Teorema 1.1 *Existe una constante $c > 0$ tal que:*

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{c}{\log x} + O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

Prueba: Utilizando la serie del logaritmo

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \quad (|x| < 1)$$

con $x = 1/p$, vemos que:

$$-\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p,k \geq 1} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + \sum_{p \leq x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}$$

(separando los términos con $k = 1$ y con $k \geq 2$). Ahora bien: la serie

$$B = \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}$$

converge pues

$$\sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} \leq \frac{1}{2} \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} \leq \sum_p \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} < \infty$$

Por consiguiente:

$$\sum_{p \leq x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = B - \sum_{p > x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k}$$

y tenemos que

$$\sum_{p > x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{kp^k} = \sum_{p > x} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n > x} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n > x} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

pues esta última suma es una serie telescópica.

Deducimos utilizando el teorema de Mertens de la clase pasada, que:

$$-\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=\log\log x+A+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+B+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

o sea

$$-\sum_{p\leq x}\log\left(1-\frac{1}{p}\right)=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

donde $C=A+B$.

Tomando exponencial deducimos que:

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{\log x}e^{-(A+B)}e^{1+O(1/\log x)}$$

y como

$$e^t=1+O(t) \text{ si } t\in[0,1]$$

concluimos que:

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{c}{\log x}\left\{1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}=\frac{c}{\log x}+O\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right)$$

con $c=e^{-(A+B)}$. □

2. La no anulación de la función zeta en la recta $\mathrm{Re}(s)=1$

Comenzamos escribiendo a la función zeta como la exponencial de otra serie de Dirichlet:

Teorema 2.1 *Si $\sigma>1$, se tiene la fórmula*

$$\zeta(s)=\exp\left\{\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 1}\frac{1}{kp^{ks}}\right\}$$

Prueba: Consideramos la serie de Dirichlet

$$G(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{\log n}n^{-s}=\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 1}\frac{1}{kp^{ks}}$$

que es absolutamente convergente en el semiplano $\sigma>1$. Como

$$G'(s)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}=\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

tenemos que:

$$\zeta(s) = e^{G(s)} \tag{1}$$

Para demostrar esto sin hacer intervenir al logaritmo procedemos del siguiente modo: Calculamos

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\zeta(s)}{e^{G(s)}}\right) = \frac{\zeta'(s)e^{G(s)} - \zeta(s)e^{G(s)}G'(s)}{e^{2G(s)}} = e^{G(s)}\left(\zeta'(s) - \zeta(s)G'(s)\right) = 0$$

Por lo tanto debe ser

$$e^{G(s)} = k\zeta(s)$$

para alguna constante k. Ahora cuando $\sigma \to +\infty$ una serie de Dirichlet converge a su término con $n = 1$. Entonces

$$G(s) \to 0 \Rightarrow e^{G(s)} \to 1$$

por otra parte

$$\zeta(s) \to 1$$

por consiguiente $k = 1$, y hemos demostrado la fórmula (1) $\square$

Ahora probaremos una desigualdad que involucra a la función zeta

Teorema 2.2 *Si $\sigma > 1$, se tiene la desigualdad:*

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma + it)|^4|\zeta(\sigma + 2it)| \geq 1$$

Prueba: La fórmula del teorema anterior se puede escribir:

$$\zeta(s) = \exp\left\{\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 1} \frac{e^{-kit\log p}}{kp^{\sigma k}}\right\}$$

Esta fórmula implica que:

$$|\zeta(s)| = \exp\left\{\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 1} \frac{\cos(kt\log p)}{kp^{\sigma k}}\right\}$$

y si aplicamos esta fórmula con $s = \sigma$, $s = \sigma + it$ y $s = \sigma + 2it$ deducimos que:

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| = \exp\left\{\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 1} \frac{3 + 4\cos(kt\log p) + \cos(2kt\log p)}{kp^{k\sigma}}\right\}$$

Teniendo en cuenta la desigualdad trigonométrica:

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0$$

que se deduce de que:

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 3 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 = 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0$$

se ve que cada término de la serie es no negativo, y por lo tanto se obtiene la desigualdad del enunciado. $\square$

El siguiente resultado es clave para la demostración del teorema de los números primos:

Teorema 2.3 *$\zeta(s) \neq 0$ si $Re(s) = 1$.*

Prueba: La desigualdad anterior se puede escribir:

$$|\zeta^3(\sigma)(\sigma-1)|^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}$$

Cuando $\sigma \to 1^+$, el primer factor tiende a 1 pues la función zeta tiene un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. Y el tercer factor tiende a $|\zeta(1+2it)|$. Si fuera $\zeta(1+it) = 0$ para algún t, tendríamos que:

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1}\right|^4 \to |\zeta'(1+it)|^4$$

con lo cual el primer miembro tendería al límite finito

$$|\zeta'(1+it)|^4 |\zeta(1+2it)|$$

mientras que el segundo miembro tiende a infinito. Esta contradicción prueba que ello no es posible. $\square$