Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 6

1. Equivalencias del teorema de los números primos

Teorema 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes (cuando $x \to +\infty$):*

i) $x \sim \frac{x}{\log x}$

ii) $\theta(x) \sim x$

iii) $\psi(x) \sim x$.

Prueba: La clase anterior probamos que ii) y iii) son equivalentes. Luego es suficiente probar que i) y ii) son equivalentes.

Para ello observamos que

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \pi(x) \log x \tag{1}$$

y por otro lado si $0 < \delta < 1$, tenemos que:

$$\theta(x) \geq \sum_{x^{1-\delta} < p \leq x} \log p \geq \log(x^{1-\delta}) \ (\pi(x) - \pi(x^{1-\delta}))$$

lo que combinado con la desigualdad trivial $\pi\left(x^{1-\delta}\right) \leq x^{1-\delta}$, nos proporciona la estimación:

$$\pi(x) \leq \frac{\theta(x)}{(1-\delta)\log x} + x^{1-\delta} \tag{2}$$

(La clase pasada hicimos esta misma estimación con $\delta = 1/2$).

Supongamos entonces que se verifica i). La estimacion (1) nos proporciona entonces que:

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{\theta(x)}{x} \leq \limsup_{x \to +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = 1$$

y la estimación (2) nos proporciona que:

$$\liminf_{x \to +`\infty} \frac{\theta(x)}{x} \geq (1-\delta) \liminf_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 - \delta$$

pues $\log x x^{-\delta} \to 0$. Como δ es arbitrario, deducimos que:

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = \liminf_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

lo que implica que se cumple ii).

Recíprocamente si suponemos que se verifica ii), (1) nos da que:

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \liminf_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

y la estimación (2) nos dice que (utilizando nuevamente que $x^{-\delta}\log x \to 0$):

$$(1-\delta)\limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \limsup_{x\to+\infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

por lo que como δ es arbitrario implica que:

$$\liminf_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \limsup_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$$

por lo que se cumple *i*). $\square$

Similarmente, haciendo algunas cuentas parecidas a las de la clase pasada, podemos probar el siguiente resultado cuya demostración dejamos como ejercicio:

Teorema 1.2 *Si p_n designa al n-ésimo número primo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \text{ cuando } x \to +\infty$$

ii)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{n\log p_n} = 1$$

iii)

$$p_n \sim n\log n \text{ cuando } n \to +\infty$$

2. Sumas que involucran a los números primos

Recordamos la fórmula

$$\log\,[x]! = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) \tag{3}$$

Teorema 2.1 *Si $x \geq 2$, tenemos que:*

$$\log[x]! = \sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x) \tag{4}$$

Prueba: Si ponemos $f(t) = \log t$ en la fórmula de Euler, obtenemos que:

$$\sum_{n \leq x} \log n = \int_x^{\infty} \log t \, dt + \int_1^x \frac{\mathrm{frac}(t)}{t} \, dt - \{x\} \log x$$

$$= x \log x - x + 1 + \int_1^x \frac{\mathrm{frac}(t)}{t} \, dt + O(\log x)$$

Esto prueba (4) pues:

$$\int_1^x \frac{\mathrm{frac(t)}}{t} \, dt = O\left(\int_1^x \frac{1}{t} \, dt \right) = O(\log x)$$

□

Teniendo en cuenta la fórmula 3, deducimos:

Corolario 2.1

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = x \log x - x + O(\log x) \tag{5}$$

Ahora si removemos los corchetes, tenemos

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n} \right] = x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} + O\left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \right)$$

pero

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x) = O(x)$$

por las cotas de Chebyshev. Deducimos que:

$$x \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = x \log x - x + O(\log x) + O(x) = x \log x + O(x)$$

y dividiendo por x obtenemos:

Teorema 2.2

$$\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$$

Ahora veremos que en la suma anterior, los términos con n primo son los que efectúan la principal contribución: en efecto teniendo en cuenta la definición de Λ:

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p^k\leq x, k\geq 1} \frac{\log p}{p^k} = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} + \sum_{p^k\leq x, k\geq 2} \frac{\log p}{p^k}$$

pero

$$\sum_{p^k\leq x, k\geq 2} \frac{\log p}{p^k} \leq \sum_{p\leq x} \log p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p(p-1)} = O(1)$$

pues la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n(n-1)}$$

converge. Concluimos que:

Teorema 2.3

$$\sum_{p\leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$$

3. La fórmula de sumación de Abel

Teorema 3.1 *Si $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función aritmética, llamemos:*

$$A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$$

a sus sumas parciales (donde $A(x) = 0$ si $x < 1$). Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en el intervalo $[x, y]$. Entonces:

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt$$

Prueba: Tenemos que:

$$S = \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \sum_{n=[x]+1}^{[y]} a(n)f(n) = \sum_{n=[y]+1}^{[x]} \{A(n) - A(n-1)\} f(n)$$

En esta suma finita podemos "sumar por partes"

$$= \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n)f(n) - \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n-1)f(n) = \sum_{n=[y]+1}^{[x]} A(n)f(n) - \sum_{m=[y]}^{[x]-1} A(m)f(m+1)$$

(llamando $m = n - 1$)

$$= f([x])A([x]) - \sum_{m=[y]+1}^{[x]-1} A(n) \{f(n+1) - f(n)\} - f([y]+1)A([y])$$

(separando el último término de la primer sumatoria, y el primero de la segunda sumatoria)

$$= f([x])A([x]) - \sum_{m=[y]+1}^{[x]-1} A(n) \int_n^{n+1} f'(t)\, dt - f([y]+1)A([y]))$$

$$= f([x])A([x]) - \int_{[y]+1}^{[x]} A(t)f'(t)\, dt - f([y]+1)A([y])$$

$$= f([x])A([x]) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt + \int_y^{[y]+1} A(t)f'(t)\, dt + \int_{[x]}^x A'(t)f(t)\, dt - f([y]+1)A[(y])$$

Pero

$$\int_{[x]}^x A'(t)f(t)\, dt = A([x])(f(x) - f([x])$$

pues $A(t) = A([x])$ si $t \in [[x], x)$. Similarmente,

$$\int_y^{[y]+1} A(t)f'(t)\, dt = A([y])(f([y]+1) - f(y))$$

pues $A(t) = A([y])$ si $t \in (y, [y]+1)$, y $A([x]) = A(x), A([y]) = A(y)$. En consecuencia:

$$S = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt$$

$\square$

Una prueba más breve se puede hacer utilizando la integral de Stieltjes pues:

$$S = \sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \int_y^x f(t)dA(t) = f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)\, df(t)$$

$$= f(x)A(x) - f(y)A(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt$$

4. Teoremas de Mertens

Teorema 4.1 *Existe una constante A tal que, para $x \geq 2$,*

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + A + \left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Prueba: Sea $A(n) = \sum_{n\leq x} \frac{\log p}{p}$. Si en la fórmula de Abel tomamos,

$$a(n) = \begin{cases} \frac{\log n}{n} & \text{si } n \text{ es primo} \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

y $f(t) = \frac{1}{\log t}$, tenemos que:

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \sum_{n \leq x} \frac{a(n)}{\log n} = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(x)}{t \log^2 t} \, dt$$

Pero $A(x) = \log x + R(x)$, donde $R(x) = O(1)$. luego

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \frac{\log + O(1)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + R(t)}{t \log^2 t} \, dt$$

$$= 1 + O\left(\frac{1}{\log x}\right) + \int_2^x \frac{dt}{t \log t} + \int_2^x \frac{R(t))}{t \log^2 t} \, dt$$

Ahora

$$\int_2^x \frac{dt}{t \log t} = \log\log x - \log\log 2$$

y

$$\int_2^x \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt = \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt - \int_x^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt$$

donde la integral impropia existe pues $R(t) = O(1)$. Por el mismo motivo, tenemos que:

$$\int_x^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt = O\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t \log^2 t}\right) = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

luego

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt + O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Lo que prueba el teorema con

$$A = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{R(t)}{t \log^2 t} \, dt$$

□

5. Aplicacion a la cantidad de divisores primos de un número

Notamos $\omega(n)$ a la cantidad de divisores primos distintos de n y $\Omega(n)$ a su cantidad totald de factores primos, contados de acuerdo a su multiplicidad.

Esto es: si n admite la factorización $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$ donde los p_i son primos distintos, entonces

$$\omega(n) = k, \Omega(n) = e_1 + e_2 + \ldots + e_k$$

Nos proponemos estimar ahora la cantidad promedio de divisores primos de un número n. Si llamamos $a(n)$ a

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ es primo} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ no es primo} \end{cases}$$

(función característica del conjunto de los primos), deducimos que:

$$\omega(n) = \sum_{d|n} a(d)$$

Utilizando el método de la hipérbola de Dirichlet

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = \sum_{n \leq x} \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{p \leq x} \left[\frac{x}{p}\right]$$

$$= x \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} + O(\pi(x))$$

y teniendo en cuenta el teorema de Mertens y las cotas de Chebyshev:

$$= x \left\{ \log\log x + A + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \right\} + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

En consecuencia obtenemos:

Teorema 5.1

$$\sum_{n \leq x} \omega(n) = x \log\log x + Ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

En particular, el orden medio de $\omega(n)$ *es* $\log\log n$*:*

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x} \omega(n) \sim \log\log x$$

Similarmente, podemos estimar el orden medio de $\Omega(n)$. Para ello ponemos:

$$\tilde{a}(n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = p^k \ (p \text{ primo}, k \geq 1) \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ no es primo} \end{cases}$$

(función característica del conjunto de los primos), deducimos que:

$$\Omega(n) = \sum_{d|n} \tilde{a}(d)$$

Utilizando el método de la hipérbola de Dirichlet:

$$\sum_{n \leq x} \Omega(n) = \sum_{n \leq x} \tilde{a}(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{p^k \leq x} \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

$$= x \sum_{p^k \le x} \frac{1}{p^k} + O(\tilde{\pi}(x))$$

donde

$$\tilde{\pi}(x) = \#\{n : n = p^k,\ k \ge 1, n \le x\}$$

Entonces como

$$p^k \le x \Leftrightarrow p \le x^{1/k}$$

tenemos que

$$\tilde{\pi}(x) = \sum_{k=1}^{m} \pi(x^{1/k})$$

donde

$$m = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$$

(Como $p \ge 2$, $p^k \le x$ implica que $k \le m$). Deducimos que:

$$\tilde{\pi}(x) = \pi(x) + \sum_{k=2}^{m} \pi(x^{1/k})$$

y utilizando las cotas de Chebyshev

$$\sum_{k=2}^{m} \pi(x^{1/k}) \le m\pi(\sqrt{x}) = C \frac{\log x}{\log 2} \frac{\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} \le C' \sqrt{x}$$

Tenemos que:

$$\tilde{\pi}(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x})$$

(esto significa que los primos efectuan la contribución más importante a $\tilde{\pi}(x)$) y por lo tanto, utilizando nuevamente las cotas de Chebyshev:

$$\tilde{\pi}(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Sustituyendo esta cota del error, tenemos que:

$$\sum_{n \le x} \Omega(n) = x \sum_{p^k \le x} \frac{1}{p^k} + O\left(\frac{x}{\log x}\right) \tag{6}$$

Para estimar la suma del primer término, la idea es nuevamente ver que los primos (con exponente $k = 1$) son los efectuan la contribución principal a dicha suma:

$$\sum_{p^k \le x} \frac{1}{p^k} = \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + \sum_{p^k \le x, k \ge 2} \frac{1}{p^k} \tag{7}$$

Ahora afirmamos que la serie

$$B = \sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 2} \frac{1}{p^k} \tag{8}$$

(sin la restricción $p \geq x$) converge[1], pues podemos escribirla como

$$\sum_{p\in\mathbb{P},k\geq 2} \frac{1}{p^k} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{k=2}^{\infty} p^k \right) = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p(p-1)}$$

y entonces está mayorada por la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

que es convergente. Deducimos que:

$$\sum_{p^k\leq x,k\geq 2} \frac{1}{p^k} = B + o(1) \text{ cuando } x \to +\infty$$

Lo cual sustituyendo en (7) y utilizando el teorema de Mertens da que

$$\sum_{p^k\leq x} \frac{1}{p^k} = \log\log x + C + o(1)$$

donde $C = A + B$.

Reemplazando en (6), esto da el siguiente teorema:

Teorema 5.2 *Existe una constante C tal que:*

$$\sum_{n\leq x} \Omega(n) = x\log\log x + Cx + o(x)$$

En particular, el orden medio de $\Omega(n)$ también es $\log\log n$

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \Omega(n) \sim \log\log x$$

Resulta instructivo comparar este resultado con el teorema 5.1, donde obtuvimos una acotación de la forma $O(x/\log x)$ para el error. En el teorema 5.2 sólo sabemos que el error es $o(x)$ (Lo cual es una afirmación más débil).

Ello se debe a la dificultad para estimar las colas de la serie (8), pues p^k puede ser grande aún siendo p pequeño.

[1] y llamamos B a la suma de dicha serie