Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 5

1. Una versión más refinada del método de la hipérbola de Dirichlet

Para obtener estimaciones más precisas en algunos casos es útil el teorema siguiente:

Teorema 1.1 *Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ funciones aritméticas. Si $h = f * g$,*

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad G(x) = \sum_{n \leq x} g(n), \quad H(x) = \sum_{n \leq x} h(n)$$

y a, b son números positivos tales que $ab = x$ entonces

$$H(x) = \sum_{n \leq a} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n \leq b} F\left(\frac{x}{n}\right) g(n) - F(a)G(b)$$

Prueba: Como antes, notamos que:

$$H(x) = \sum_{(d,q):qd \leq x} f(d)g(q)$$

La suma está extendida a los puntos (d, q) de coordenadas enteras por debajo de la hipérbola $qd = x$ en el primer cuadrante. Consideramos las regiones

$$A = \{(d, q) \in \mathbb{N}^2 : qd \leq x, d \leq a\}$$

$$B = \{(d, q) \in \mathbb{N}^2 : dq \leq x, q \leq b\}$$

$$C = A \cap B = \{(d, q) \in \mathbb{N}^2 : qd \leq x, d > a\}$$

Ahora notamos que:

$$\sum_{d \leq a} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d \leq a} f(d) \sum_{q \leq x/d} g(q) = \sum_{(d,q) \in A} f(d)g(q)$$

Similarmente:

$$\sum_{q \leq b} F\left(\frac{x}{d}\right) g(q) = \sum_{q \leq b} g(q) \sum_{d \leq x/q} f(d) = \sum_{(d,q) \in B} f(d)g(q)$$

Sumando obtenemos que:

$$\sum_{d\leq a} f(d)G\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{q\leq b} F\left(x/d\right) g(q) = \sum_{(d,q)\in A} f(d)g(q) + \sum_{(d,q)\in B} f(d)g(q)$$

Ahora los puntos de la región C están contados dos veces. Su contribucion es dos veces la suma

$$\sum_{(d,q)\in B} f(d)g(q) = F(a)F(b)$$

Luego, restándola una vez obtenemos que:

$$H(x) = \sum_{d\leq a} f(d)G\left(\frac{x}{d}\right) + \sum_{q\leq b} F\left(\frac{x}{d}\right) g(q) - F(a)G(b)$$

□

En particular, si elegimos $a = b = \sqrt{x}$.

$$H(x) = \sum_{n\leq\sqrt{x}} f(n)G\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{n\leq\sqrt{x}} F\left(\frac{x}{n}\right) g(n) - F(\sqrt{x})G(\sqrt{x})$$

Por ejemplo si elegimos $f(n) = g(n) = 1$, obtenemos la siguiente estimación para las sumas parciales de $d(n)$:

$$D(x) = \sum_{n\leq x} d(n) = 2\sum_{n\leq\sqrt{x}} \left[\frac{x}{n}\right] - [\sqrt{x}][\sqrt{x}]$$

$$= 2\sum_{n\leq\sqrt{x}} \frac{x}{n} + O(\sqrt{x}) - (\sqrt{x} + O(1))^2$$

$$= 2x\left\{\log\sqrt{x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right\} + O(\sqrt{x}) - \left\{x + O(\sqrt{x})\right\}$$

$$= x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

Hemos pues demostrado la siguente fórmula asintótica:

Teorema 1.2 (Dirichlet) *Para* $x \geq 1$,

$$\sum_{n\leq x} d(n) = x\log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x})$$

2. Aplicación del método de la hipérbola de Dirichlet a μ

Teorema 2.1 *Para* $x \geq 1$,

$$\sum_{n\leq x} \mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1 \tag{1}$$

Prueba: Esto se deduce a partir de que $u * \mu = I$, aplicando el método de la hipérbola de Dirichlet. $\square$

Teorema 2.2

$$\sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = O(1)$$

Prueba:

$$1 = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[\frac{x}{n}\right] = x \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} + O(x)$$

Dividiendo por x se obtiene el teorema. $\square$

Observación: Se puede probar que el teorema de los números primos

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\pi(x)} \text{ cuando } x \to +\infty$$

es equivalente a la afirmación de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}$$

converge y suma cero. Nosotros acabamos de probar que sus sumas parciales son acotadas.

3. Las funciones de Chebyshev $\psi(x)$ y $\vartheta(x)$

Definición 3.1 *La función de Mangolt* $\Lambda(n)$ *se define por:*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^k (p \text{ primo}) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Definición 3.2 *Para* $x > 0$ *definimos las funciones de Chebyschev:*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

$$\vartheta(x) = \sum_{n \leq x} \log\ p$$

Estas funciones están relacionadas entre sí: como $\Lambda(n) = 0$ salvo cuando n es una potencia de un primo, tenemos que:

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p: p^m \leq x} \Lambda(p^m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \log p$$

La suma sobre m es finita. De hecho, la suma sobre p es vacía si $x^{1/m} < 2$, es decir si $(1/m)\log x < log 2$, o sea si

$$m > \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$$

En consecuencia, obtenemos la fórmula

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) \tag{2}$$

El siguiente teorema relaciona los cocientes $\psi(x)/x$ y $\vartheta(x)/x$:

Teorema 3.1 *Para $x > 0$ tenemos,*

$$0 \leq \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{(\log x)^2}{2\sqrt{x}\log 2}$$

Observación 3.1 *Este teorema implica que*

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0$$

Por consiguiente, las afirmacioes $\psi(x) \sim x$ y $\vartheta(x) \sim x$ cuando $x \to +\infty$ son equivalentes.

Prueba: La relación (2) implica que

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m})$$

Pero de la definición de $\vartheta(x)$ obtenemos la desigualdad trivial:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq x \log x$$

Luego:

$$0 \leq \psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} x^{1/m} \log(x^{1/m}) \leq (\log_2 x)\sqrt{x} \log \sqrt{x}$$

(acotando por el mayor de los términos multiplicado por la cantidad de términos)

$$= \frac{\log x}{\log 2} \frac{\sqrt{x}}{2} \log x = \frac{\sqrt{x}(\log x)^2}{2 \log 2}$$

Dividimos por x y obtenemos el teorema. $\square$

Teorema 3.2

$$\log\,[x]! = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

Prueba: Recordamos que:

$$\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

lo que significa que:

$$\log n = \Lambda * u$$

Utilizando el método de la hipérbola de Dirichlet deducimos la identidad:

$$\sum_{n\leq x} \log n = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{n\leq x} \psi\left(\frac{x}{n}\right)$$

pero

$$\sum_{n\leq x} \log n = \log\left(\prod_{n\leq x} n\right) = \log\,[x]!$$

de lo que se deduce la identidad del teorema. □

Teorema 3.3 (identidad de Legendre)

$$[x]! = \prod_{p\leq x} p^{\alpha(p)}$$

donde

$$\alpha(p) = \sum_{k=1}^{t_p} \left[\frac{x}{n}\right]$$

y

$$t_p = \left[\frac{\log x}{\log p}\right] = \left[\log_p x\right]$$

Prueba: Como $\Lambda(n)$ es cero a menos que n sea una potencia de un primo, a partir de la identidad del teorema anterior, obtenemos:

$$\log\,[x]! = \sum_{x\leq n} \Lambda(n) \left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{p\leq n} \log p \sum_{k\geq 1} \left[\frac{x}{p^k}\right]$$

En la suma interior podemos sumar para $k \leq t_p$ (pues sino el término correspondiente es cero). Luego concluimos que:

$$\log\,[x]! = \sum_{p\leq n} \alpha(p)\ \log p$$

Tomando la exponencial de ambos miembros, resulta la identidad del teorema.
□

4. Las estimaciones de Chebyshev

Teorema 4.1

$$\vartheta(x) \leq 4 \log 2 \; x$$

en particular

$$\vartheta(x) = O(x)$$

Prueba: Consideramos el coeficiente binomial

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Tenemos que

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la factorización del teorema 3.3, cualquier primo con $n < p \leq 2n$ divide a $(2n)!$ y no a $n!$, por lo tanto el producto

$$\prod_{n<p\leq 2n} p$$

divide a $\binom{2n}{n}$, por lo tanto:

$$\prod_{n<p\leq 2n} p \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

luego

$$\vartheta(2n) - \vartheta(n) = \sum_{n<p\leq 2n} \log p \leq 2n \log 2$$

Sumando esta relación para $n = 1, 2, 4, 8, \ldots 2^{m-1}$ tenemos que:

$$\vartheta(2^m) \leq (\log 2)(2^{m+1} - 2) \leq (\log 2) 2^{m+1}$$

Luego si $2^{m-1} < x \leq 2^m$, tenemos

$$\vartheta(x) \leq \vartheta(2^m) < (\log 2) 2^{m+1} = (4 \log 2) 2^{m-1} \leq (4 \log 2) x$$

$\square$

Corolario 4.1

$$\psi(x) = O(x)$$

Corolario 4.2

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

Prueba:

$$\vartheta(x) \geq \sum_{\sqrt{x}<p\leq x} \log p = \log \sqrt{x} \sum_{\sqrt{x}<x\leq x} 1 = \frac{1}{2} \log x \, (\pi(x) - \pi(\sqrt{x}))$$

luego

$$\pi(x) \leq \frac{2\vartheta(x)}{\log x} + \pi(\sqrt{x}) \tag{3}$$

pero tenemos la cota trivial $\pi(\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}$, luego deducimos que:

$$\pi(x) \leq c\frac{x}{\log x} + \sqrt{x}$$

y como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x/logx} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}} = 0$$

Deducimos que:

$$\pi(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

□

Ahora deduciremos una estimación en la dirección opuesta:

Teorema 4.2 *Existe una constante $c > 0$ tal que:*

$$\pi(x) \geq c\frac{x}{\log x}$$

si $x \geq x_0$.

Prueba: Volvamos a examinar el coeficiente binomial $\binom{2n}{n}$. Tenemos la desigualdad:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n!} = \left(\frac{n+1}{1}\right)\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdots\left(\frac{n+n}{n}\right) \geq 2^n$$

Por otro lado, a partir del teorema 3.3, deducimos que:

$$\log\binom{2n}{n} = \log(2n)! - \log n! = \sum_{p\leq 2n} \beta(p)\log p$$

donde

$$\beta(p) = \sum_{k=1}^{t_p}\left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right]\right)$$

y

$$t_p = \left[\frac{\log 2n}{\log p}\right]$$

Entonces:

$$n \log 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \beta(p) \log p$$

y como $[2x] - 2[x]$ es 0 o 1, tenemos la estimación:

$$\beta(p) \leq t_p \leq \frac{\log 2n}{\log p}$$

En consecuencia,

$$n \log 2 \leq \sum_{p \leq 2n} \log 2n = \log(2n)\pi(2n)$$

Lo que da la desigualdad:

$$\frac{n}{\log(2n)} \log 2 \leq \pi(2n)$$

o sea

$$c\frac{2n}{\log(2n)} < \pi(2n)$$

con $c = \frac{\log 2}{2} \approx 0,346\ldots$. Finalmente, si x es arbitrario, será $2n \leq x < 2n+2$ para algún n y entonces:

$$\pi(x) \geq \pi(2n) \geq c\frac{2n}{\log(2n)} \geq c\frac{x-2}{\log x} = c\frac{x}{\log x}\frac{(x-2)}{x} \geq (c-\varepsilon)\frac{x}{\log x}$$

si $x \geq x_0$. □

Corolario 4.3 *Existe una constante $c > 0$ tal que:*

$$\vartheta(x) \geq cx$$

si $x \geq x_0$

Prueba: Volvermos a utilizar la relacion (3):

$$\pi(x) \leq \frac{2\vartheta(x)}{\log x} + \pi(\sqrt{x})$$

Luego:

$$c\frac{x}{\log x} \leq \frac{2\vartheta(x)}{\log x} + \sqrt{x}$$

o sea:

$$\frac{1}{2}cx \leq \vartheta(x) - \frac{1}{2}\sqrt{x}\log x \leq \vartheta(x)$$

y como

$$\sqrt{x}\log x = o(x)$$

se deduce el teorema. □

Similarmente, aplicando el teorema 3.1, deducimos que:

Corolario 4.4 *Existe una constante $c > 0$ tal que:*

$$\psi(x) \geq cx$$

si $x \geq x_0$.

5. Cotas del enésimo primo

Designemos por p_n el n-ésimo primo, entonces se tiene el teorema siguiente:

Teorema 5.1 *Existen constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que:*

$$c_1 n \log n \leq p_n \leq c_2 n \log n$$

Prueba: Notamos que $\pi(p_n) = n$. En consecuencia, las cotas de Chebyshev proporcionan:

$$c_1 \frac{p_n}{\log p_n} \leq n \leq c_2 \frac{p_n}{\log p_n}$$

luego:

$$c_1 p_n \leq n \log p_n \tag{4}$$

y

$$c_2 p_n \geq n \log p_n$$

Observamos que se tiene la estimación trivial $p_n > n$. Luego:

$$p_n \geq \frac{1}{c_2} n \log n$$

Para obtener una estimación en la dirección opuesta, notamos que:

$$\log x \leq c_3 \sqrt{x}$$

para $x \geq 2$. En consecuencia (4) implica que:

$$c_3 \sqrt{p_n} \leq n$$

por lo tanto

$$\log p_n \leq \log n - \log c_3$$

y volviendo a usar (4)

$$c_2 p_n \leq n(\log n - \log c_3) \leq c_4 n \log n$$

□

Observación: La cota del teorema anterior prueba nuevamente que la serie

$$\sum_n \frac{1}{p_n}$$

formada por los recíprocos de los números primos diverge, comparándola con

$$\sum_n \frac{1}{n \log n}$$