Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 4

Medias de funciones aritméticas

A continuación estudiaremos el valor asintótico de sumas de la forma

$$\sum_{n \leq x} f(n)$$

siendo $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función aritmética. Muchas veces una función aritmética varía mucho según n sea por ejemplo un número primo ,o uno compuesto con muchos factores, y por eso en general las funciones aritméticas no tienen un orden de crecimiento definido. Pero sus promedios:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

suelen tener un comportamiento más regular.

1. Fórmula de sumación de Euler

En muchas aplicaciones, para obtener el valor asintótico de una suma resulta necesaria compararla con una integral. La fórmula de sumación de Euler proporciona una estimación del error cometido en esta aproximación.

Notación: Dado un número real $x \in \mathbb{R}$, escribimos:
$[x]$ = parte entera de x (= el mayor entero que es menor o igual que x).
$\mathrm{fr}(x) = x - [x]$ denota la parte fraccionaria de x. Notamos que $0 \leq \mathrm{fr}(x) < 1$.

Teorema 1.1 (Fórmula de sumación de Euler) *Si $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ tiene derivada continua en el intervalo $[x, y]$ entonces tenemos:*

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\, dt + \int_y^x f'(t) fr(t)\, dt - f(x) fr(x) + f(y) fr(y) \tag{1}$$

Prueba: Comenzamos partiendo la integral de f según los puntos de coordenadas enteras en el intervalo $(y, x]$:

$$\int_y^x f(t)\ dt = \int_y^{[y]+1} f(t)\ dt + \sum_{n=[y]+1}^{[x]-1} \int_n^{n+1} f(t)\ dt + \int_{[x]}^x f(t)\ dt$$

Ahora, en cada término podemos integrar por partes del siguiente modo:

$$\int_n^{n+1} f(t)\ dt = \int_n^{n+1} (t-n)' f(t)\ dt = f(n+1) - \int_n^{n+1} (t-n) f'(t)\ dt$$

$$= f(n+1) - \int_n^{n+1} \mathrm{fr}(t) f'(t)\ dt$$

$$\int_y^{[y]+1} f(t)\ dt = \int_y^{[y]+1} (t-[y])' f(t)\ dt = f([y]+1) - f(y)\{y\} - \int_y^{[y]+1} (t-[y]) f'(t)\ dt$$

$$= f([y]+1) - f(y)\mathrm{fr}(y) - \int_y^{[y]+1} \mathrm{fr}(t) f'(t)\ dt$$

$$\int_{[x]}^x f(t)\ dt = \int_{[x]}^x (t-[x])' f(t)\ dt = f(x)\mathrm{fr}(x) - \int_{[x]}^x \mathrm{fr}(t) f'(t)\ dt$$

Con lo que sumando obtenemos:

$$\int_y^x f(t)\ dt = f(x)\mathrm{fr}(x) - f(y)\mathrm{fr}(y) + \sum_{n=[y]}^{[x]-1} f(n+1) - \int_y^x \mathrm{fr}(t) f'(t)\ dt$$

Como

$$\sum_{n=[y]}^{[x]-1} f(n+1) \sum_{y<n\leq x} f(n)$$

reordenando los términos se obtiene la fórmula (1). □

Observación: Una demostración más sencilla es posible utilizando la fórmula de integración por partes para la integral de Stieltjes pues:

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_x^y f(t) d[t]$$

2. Algunas fórmulas asintóticas elementales

En esta sección, aplicando la fórmula de sumación de Euler deduciremos algunas fórmulas asintóticas elementales:

Notacion: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $g(x) > 0$ para $x > a$ escribiremos

$$f(x) = O(g(x))$$

[se lee $f(x)$ es O-mayuscula de $g(x)$] para indicar que el cociente $f(x)/g(x)$ se halla acotado para $x > a$, esto es si existe una constante $M > 0$ tal que:

$$|f(x)| \leq Mg(x) \text{ para } x > a$$

Una expresion de la forma:

$$f(x) = g(x) + O(h(x))$$

significa que $f(x) - g(x) = O(h(x))$.

También introducimos la notación

$$f(x) = o(g(x)) \text{ cuando } x \to +\infty$$

que significa que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Teorema 2.1 *Sea $\alpha \geq 0$ entonces*

$$\sum_{n \leq x} n^{\alpha} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$$

Prueba: Aplicando la fórmula de sumación de Euler a $f(t) = t^{\alpha}$ en el intervalo $(1, x]$:

$$\sum_{n \leq x} n^{\alpha} = \int_1^x t^{\alpha}\, dt + \alpha \int_1^x t^{\alpha-1} \mathrm{fr}(t)\, dt + 1 - \mathrm{fr}(x) x^{\alpha}$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1} + O\left(\alpha \int_1^x t^{\alpha-1}\, dt\right) + O(x^{\alpha}) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(x^{\alpha})$$

$\square$

Teorema 2.2 *Para $x \geq 1$,*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

donde γ es una constante que se conoce como la constante de Euler.

Prueba: Tomando $f(t) = 1/t$ en la fórmula de sumación de Euler en el intervalo $(1, x]$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n \le x} \frac{1}{n} &= \int_1^x \frac{dt}{t} - \int_1^x \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt + 1 - \frac{\mathrm{fr}(x)}{x} \\ &= \log x - \int_1^x \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \log x - \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt + \int_x^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt + 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

La integral $\int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt$ existe pues está mayorada por $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$. Y la otra integral podemos acotarla:

$$0 \le \int_x^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt \le \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{x}$$

En consecuencia, obtenemos la fórmula asintótica:

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + 1 - \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

Llamando

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^2}\, dt$$

obtenemos el enunciado. □

Como consecuencia de este teorema, constante de Euler se puede definir por

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

El valor numérico aproximado de γ es [1]:

$$\gamma \approx 0{,}5772156649015328606065120900824024310422\ldots$$

No se conoce si γ es racional o no.

Ahora aplicamos la fórmula de sumación de Euler a las sumas parciales de la función zeta:

Teorema 2.3 *Si $s \in \mathbb{R}, s > 1$ y $x \ge 1$ se tiene la fórmula asintótica:*

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^s) \tag{2}$$

Además:

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = O(x^{1-s})$$

[1] Calculada con el comando *Euler* en Pari/Gp.

Prueba: Tomamos $f(t) = t^{-s}$ en la fórmula de sumación de Euler en el intervalo $(1, x]$, lo que nos proporciona:

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \int_1^x t^{-s}\, dt - s \int_1^x t^{1-s} \mathrm{fr}(t)\, dt + 1 - \mathrm{fr}(x) x^{-s} =$$

$$= \frac{x^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} + 1 - s \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^{s+1}}\, dt + O(x^{-s})$$

Por consiguiente:

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + C(s) + O(x^{-s})$$

donde

$$C(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^{s+1}}\, dt$$

Como $s > 1$, cuando $x \to +\infty$ el primer miembro tiende a $\zeta(s)$, y vemos que los términos x^{-s} y x^{1-s} tienden a cero, por consiguiente $\zeta(s) = C(s)$, y se obtiene la fórmula (2).

Además:

$$\sum_{n > x} \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-s}) = O(x^{1-s})$$

ya que $x^{-s} \le x^{1-s}$ □

Corolario 2.1 *Si $s > 1, s \in \mathbb{R}$ tenemos la representación integral:*

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \frac{fr(t)}{t^{s+1}}\, dt \tag{3}$$

Notamos que la integral

$$I(s) = \int_1^\infty \frac{\mathrm{fr}(t)}{t^{s+1}}\, dt$$

define una función analítica de s en el semiplano $\sigma = \mathrm{Res}(s) > 0$. En consecuencia, por prolongación analítica la fórmula (3) es válida también para s complejo con $\sigma > 1$

Entonces la formula (3) puede utilizarse para prolongar la función zeta a una función meromorfa en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 0$, cuya única singularidad es un polo simple en el punto $s = 1$ con residuo igual a 1 (lo que se ve inmediatamente a partir de dicha fórmula).

Notemos así mismo que habiendo prolongado así la definición de la función zeta , resulta que la fórmula (2) es válida si $0 < s < 1$, y en particular, se tiene que:

$$\zeta(s) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} \right) = 0 \text{ si } 0 < s < 1$$

En resumen, hemos demostrado

Teorema 2.4 *La función zeta de Riemann es una función meromorfa en el semiplano $Re(s) > 0$ cuya única singularidad es un polo simple de residuo 1 en $s = 1$. Y la fórmula asintótica*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s} + \zeta(s) + O(x^s)$$

se verifica para cualquier $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$, $s \neq 1$.

3. El orden medio de $d(n)$

Consideremos el problema de estimar la suma

$$D(x) = \sum_{n \leq x} d(n) \tag{4}$$

Como

$$d(n) = \sum_{d|n} u(d)$$

podemos escribir:

$$\sum_{n \leq x} d(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} u(d) = \sum_{qd \leq x} u(d)$$

Es decir que esta suma representa el número de puntos con coordenadas enteras por debajo de la hipérbola $qd = x$ en el primer cuadrante del plano con ejes q y d. Si sumamos por las lineas $q =$ constante obtenemos

$$D(x) = \sum_{q \leq x} \sum_{d \leq \frac{x}{q}} u(d) = \sum_{q \leq x} \left[\frac{x}{d}\right]$$

Podemos remover los símbolos de parte entera, cometiendo un error acotado por 1 en cada término, y como hay $[x]$ términos:

$$D(x) = \sum_{q \leq x} \frac{x}{q} + O(x)$$

Usando la fórmula asintótica del teorema (2.2) obtenemos que

$$D(x) = x \left\{ \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} + O(x) = xlogx + O(x)$$

Teorema 3.1 (Dirichlet)

$$\sum_{n \leq x} d(n) = x \ \log x + O(x)$$

En particular,

$$\sum_{n \leq x} d(n) \sim x \log x \text{ cuando } n \to +\infty$$

Más adelante probaremos una fórmula más precisa.

3.1. Generalización a la evaluación de las sumas parciales de una convolución de Dirichlet

El argumento anterior se puede generalizar para obtener una expresión de las sumas parciales de una función dada por una convolución de Dirichlet.

Teorema 3.2 *Si* $h = f * g$,

$$F(x) = \sum_{n \le x} f(n), \quad G(x) = \sum_{n \le x} g(n), \quad H(x) = \sum_{n \le x} h(n)$$

entonces

$$H(x) = \sum_{d \le x} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d \le x} F\left(\frac{x}{d}\right) g(d)$$

En particular, cuando $g = 1$ se obtiene:

Corolario 3.1 *Si* $h(n) = \sum_{d|n} f(n)$ *y* $F(x) = \sum_{n \le x} f(n)$, *entonces*

$$\sum_{n \le x} h(n) = \sum_{d|n} f(n) \left[\frac{x}{d}\right] = \sum_{n \le n} F\left(\frac{x}{n}\right)$$

Prueba:

$$H(x) = \sum_{n \le x} h(n) = \sum_{n \le x} \sum_{qd=n} f(d)g(q) = \sum_{d \le x} \sum_{q \le x/d} f(d)g(q) = \sum_{d \le x} f(d) G\left(\frac{x}{d}\right)$$

Similarmente intercambiando los roles de f y g:

$$H(n) = \sum_{d \le x} F\left(\frac{x}{d}\right) g(d)$$

$\square$

4. El orden medio de la indicatriz de Euler

Sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$$

Como $|\mu(1)| \le 1$, esto implica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\sum_{n > x} \frac{\mu(n)}{n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

por la segunda fórmula del teorema 2.3, ya que (como veremos más adelante)

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Teorema 4.1

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x)$$

Prueba: Como $\varphi=\mu*N$, usando el método de la hipérbola de Dirichlet,

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\sum_{n\leq x}\mu(n)S\left(\frac{x}{n}\right)$$

donde

$$S(x)=\sum_{n\leq x}n=\frac{x^2}{2}+O(x)$$

Luego:

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n)=\sum_{n\leq x}\mu(n)\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2+O\left(\frac{x}{n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\sum_{n\leq x}\frac{\mu(n)}{n^2}+O\left(\sum_{n\leq x}\frac{x}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}x^2\left\{\frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\}+O(x\log x)=\frac{3}{\pi^2}x^2+O(x\log x)$$

$\square$

Corolario 4.1

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\varphi(n)\sim\frac{3}{\pi^2}x$$