Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 3

1. Ejemplos de funciones generatrices

El teorema que vimos la clase anterior sobre el producto de series de Dirichlet permite determinar las funciones generatrices asociadas a muchas funciones aritméticas. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1: Tenemos que

$$d = u * u, \quad \sigma = N * u, \quad \sigma_k = N^k * u$$

Entonces

$$\zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} \ (\sigma > 1)$$

$$\zeta(s)\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^s} \ (\sigma > 2)$$

$$\zeta(s)\zeta(s-k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} \ (\sigma > k+1)$$

Ejemplo 2: Consideramos la serie de Dirichlet

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Como $|\mu(n)| \leq 1$, esta serie converge absolutamente en el semiplano $\sigma > 1$. Como $\mu * u = I$, aplicando tenemos que:

$$F(s)\zeta(s) = 1$$

Esto implica que si $\sigma > 1$, $\zeta(s) \neq 0$ y se tiene

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \tag{1}$$

Ejemplo 3: Como $\varphi = N * \mu$, concluimos que

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} \ (\sigma > 2)$$

2. La derivada de una serie de Dirichlet

Teorema 2.1 *Supongamos que la serie de Dirichlet*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} \tag{2}$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\sigma>\sigma_a$. Entonces su derivada se puede calcular derivando término a término en el semiplano $\sigma>\sigma_a$, y la serie resultante

$$F'(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\log n)f(n)}{n^s} \tag{3}$$

es también absolutamente convergente en él.

Prueba: Dado cualquier $\varepsilon>0$, tendremos que:

$$\log n\le C_\varepsilon n^{\varepsilon/2}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$$

(donde la constante C_ε depende de ε). Entonces:

$$\left|\frac{(-\log n)f(n)}{n^s}\right|\le C\frac{|f(n)|}{n^{\sigma+\varepsilon/2}}\ \text{si}\ \sigma\ge\sigma_a+\varepsilon$$

Por el test de Weierstrass deducimos que la serie (3) converge absoluta y uniformemente en cada semiplano $\sigma\ge\sigma_a+\varepsilon$, por lo que la derivación término a término de la serie (2) está justificada. □

Ejemplo: La derivada de la función zeta viene dada por:

$$\zeta'(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\log n)}{n^s}\ (\sigma>1)$$

Análogamente podemos calcular sus derivadas de orden superior:

$$\zeta^{(k)}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\log n)^k}{n^s}\ (\sigma>1)$$

Ejemplo: Definamos la función de Mangoldt, que juega un papel muy importante en la teoría de los números primos:

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p\ \text{si}\ n=p^k\\ 0\ \text{si}\ n\ \text{no es una potencia de un primo}\end{cases}$$

Teorema 2.2

$$\log n=\sum_{d|n}\Lambda(n)$$

Prueba: Si la factorización de n es

$$n = \prod_{p|n} p^{v_p(n)}$$

tenemos que

$$\log n = \sum_{p|n} v_p(n) \log p$$

Por otra parte de acuerdo a la definición de Λ:

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{p|n} \sum_{k \geq 1 : p^k | n} \log p = \sum_{p|n} v_p(n) \log p$$

por lo que ambas expresiones coinciden. $\square$

Aplicando la fórmula de inversión de Möbius, tenemos la siguiente expresión de Λ:

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \log d \mu \left(\frac{n}{d} \right) \text{ o sea } \Lambda = \log * \mu$$

Entonces se tiene la siguiente fórmula para la derivada logarítmica de la función zeta:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma > 1) \tag{4}$$

También podemos escribir

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \log \left(\frac{n}{d} \right) = \sum_{d|n} \mu(d) \log n - \sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

y como

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0 \text{ si } n > 1$$

deducimos que

$$\Lambda(n) = -\sum_{d|n} \mu(d) \log d$$

(Esta última fórmula también se verifica si $n = 1$).

La fórmula (4) también se puede derivar a partir del producto de Euler

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \tag{5}$$

En efecto, considerando $s \in \mathbb{R}$ y tomando logaritmos

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log(1 - p^{-s})$$

Derivando término a término obtenemos la serie:

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \frac{(\log p)\, p^{-s}}{1 - p^{-s}}$$

siendo la serie absolutamente convergente si $s > 1$. Si consideramos valores complejos de s, la serie es absolutamente convergente si $\sigma > 1$, y uniformemente convegrnete en cada semiplano $\sigma \geq 1 + \varepsilon$, por lo que la serie representa una función analítica en el semiplano $\sigma > 1$. Por prolongación analítica, la última identidad es válida en el semiplano $\sigma > 1$.

Expandiendo cada término en serie geométrica:

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \log p \sum_{k=1}^{\infty} p^{-ks} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

por la definición de Λ.

Notamos que a partir de la fórmula (4), también se puede deducir la fórmula del teorema 2.2 (utilizando el teorema sobre el producto de series de Dirichlet), por lo que ambas fórmulas son en realidad equivalentes.

Observación: Teniendo en cuenta el teorema anterior, podemos definir la derivada de una función aritmética f como la función aritmética f' dada por:

$$f'(n) = f(n) \log n$$

Esta “derivada” satisface la regla de Leibniz respecto a la convolución de Dirichlet:

$$(f * g)' = f' * g + f * g'$$

3. Repaso de algunas nociones sobre productos infinitos

En lo sucesivo tendremos que trabajar frecuentemente con productos infinitos, por lo que resulta conveniente respasar algunas nociones básicas sobre productos infinitos. Para más detalles, se recomienda consultar algún texto de la teoría de funciones de variable compleja [1]

Un producto infinito de la forma

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n \tag{6}$$

se interpreta como el límite (cuando $N \to +\infty$) de sus productos parciales:

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} u_n$$

[1] Por ejemplo el libro de Ahlfors, *Complex Analysisis*, capítulo 4, sección 2.2.

de modo similar al que una serie es el límite de sus sumas parciales.

Sin embargo, para evitar excepciones molestas en los teoremas, es conveniente excluir el caso en que el límite de los productos parciales es cero, a no ser que un número finito de factores se anule. Por eso adoptamos la siguiente definición:

Definición 3.1 *Se dice que el producto infinito* (6) *converge si sólo un número finito de factores es distinto de cero, y si los productos parciales formados por los factores no nulos convergen a un límite finito y diferente de cero.*

En este caso definimos el valor del producto infinito como el límite de los productos parciales:

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n$$

De acuerdo al convenio que hemos hecho; este límite será cero, para un producto convergente, si y sólo si $u_k = 0$ *para algún* k.

Si el producto (6) converge, tendremos que $u_n \to 1$ cuando $n \to +\infty$ pues $u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ (si omitimos los posibles factores nulos).

Por lo tanto consideraremos productos infinitos de la forma:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) \tag{7}$$

donde $a_n \to 0$ (que es una condición necesaria para que el producto infinito converja).

Notamos que para valores complejos de z, la rama principal de $\log(1 + z)$ está bien definida si $|z| < 1$. Como si $n \geq n_0$, tendremos $|a_n - 1| < 1$, podemos considerar la serie

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \log(1 + a_n) \tag{8}$$

Entonces se tiene el teorema siguiente[2]:

Teorema 3.1 *El producto infinito* (7) *converge si y sólo si la serie* (8) *formada por los logaritmos de sus factores (calculados usando la rama principal del logaritmo) converge.*

Esto motiva la siguiente definición

Definición 3.2 *Decimos que el producto infinito* (7) *converge absolutamente si y sólo si la serie* (8) *formada por los logaritmos de sus factores (calculados usando la rama principal del logaritmo) converge absolutamente.*

[2] Ahlfors, capítulo 4, teorema 5

Dado que si $|z| < \delta$ (con delta pequeño) tendremos

$$(1-\varepsilon)|z| \leq |log(1+z)| \leq (1+\varepsilon)|z|$$

deducimos inmediatamente el teorema siguiente[3]:

Teorema 3.2 *Una condición necesaria y sufinciente para que el producto infinito* (7) *conveja absolutamente es que la serie*

$$\sum_{n=1} |a_n|$$

converja.

Observacion: Si un producto infinito convege absolutamente, es posible reordenar arbitrariamente sus factores sin cambiar su valor. (Pues lo mismo sucede para la serie formada por los logaritmos de sus factores).

Observacion 2: En general, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ no es una condición necesaria ni suficiente para la convergencia del producto infinito (7).

Ejemplo: El producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)$$

es absolutamente convegente si $|z| < 1$, pues la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

lo es. Esto muestra que el producto:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n}$$

que da la función generatriz de la función de partición $p(n)$ (que vimos la clase pasada), es convergente si $|z| < 1$.

Ejemplo: Análogamente, el producto

$$\prod_{p}(1-p^{-s})$$

(con p recorriendo los primos) es absolutamente convergente si $\sigma > 1$, pues la serie

$$\sum_{p} p^{-s}$$

lo es. Esto muestra que el producto de Euler (5) es convergente si $\sigma > 1$.

[3]Ahlfors, capítulo 4, teorema 6

4. Productos de Euler en general

El producto de Euler para la función zeta (5) que vimos en la primer clase puede generalizarse a otras series, lo cual también constituye una expresión analítica del teorema fundamental de la aritmética:

Teorema 4.1 *Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es absolutamente convegente. Entonces la suma de la serie se puede expresar como un producto infinito absolutamente convergente*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left\{ 1 + f(p) + f(p^2) + \ldots \right\} \tag{9}$$

donde el producto está extendido sobre el conjunto $\mathbb{P}$ de los números primos. Si f es completamente multiplicativa, el producto se simplifica y obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1 - f(p)} \tag{10}$$

Nota: Los desarrollos en producto infinito dados por este teorema se denominan productos de Euler.
Prueba: Consideramos el producto finito

$$P_N = \prod_{p \leq N} \left\{ 1 + f(p) + f(p^2) + \ldots \right\}$$

extendido sobre los primos que son menores o iguales que N. Como se trata del producto de un número finito de series absolutamente convergentes, podemos multiplicarlas efectuando la distributiva y ordenando los términos en el orden que más nos convenga, obteniendo dado que f es multiplicativa:

$$P_N = \sum_{n \in A_N} f(n)$$

donde A_N es el conjunto de enteros cuyos factores primos son menores o iguales que N. En consecuencia,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) - P_N = \sum_{n \in A_N^c} f(n)$$

donde A_N^c (complemento de A_N) es el conjunto de enteros con al menos un factor primo $> N$. En consecuencia,

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) - P_N \right| \leq \sum_{n \in A_N^c} |f(n)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n)|$$

. Cuando $N \to +\infty$, la última serie tiende a 0 cuando $N \to +\infty$, pues la serie $\sum_n |f(n)|$ converge, por hipótesis. En cosecuencia, $P_N \to \sum_n f(n)$ cuando $N \to +\infty$.

Además un producto infinito de la forma $\prod(1+a_n)$ converge absolutamente siempre que la serie asociada $\sum a_n$ convegja absolutamente. En este caso,

$$\sum_{p\leq N}|f(p)+f(p^2)\ldots| \leq \sum_{p\leq N}(|f(p)|+|f(p^2)|+\ldots) \leq \sum_{n=2}^{\infty}|f(n)|$$

Al estar acotadas todas sus sumas parciales, la serie de términos positivos

$$\sum_{p}|f(p)+f(p^2)\ldots|$$

converge, y esto implica la convergencia absoluta del producto (9).

Finalmente, cuando f es completamente multiplicativa $f(p^k)=f(p)^k$, y el término general de (9) es una serie geométrica absolutamente convergente cuya suma es $\frac{1}{1-f(p)}$ por lo que se obtiene (10). $\square$

Usualmente este teorema se aplica para obtener productos de Euler para funciones dadas por series de Dirichlet:

Corolario 4.1 *Sea f una función aritmética multiplicativa, y supongamos que la correspondiente serie de Dirichlet*

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$$

es absolutamente convergente en el semiplano $\sigma>\sigma_a$. Entonces, se tiene el desarrollo en producto de Euler

$$F(s)=\prod_{p\in\mathbb{P}}\left\{1+f(p)p^{-s}+f(p^2)p^{-2s}++f(p^k)p^{-ks}+\ldots\right\}$$

absolutamente convergente, válido para $\sigma>\sigma$. En particular, si f es completamente multiplicativa, tenemos que:

$$F(s)=\prod_{p}\frac{1}{1-f(p)p^{-s}} \quad (\sigma>\sigma_a)$$

Prueba: Basta aplicar lo anterior a la función aritmética $\tilde{f}(n)=f(n)n^{-s}$. $\square$

Ejemplo: Tomamos $f=\mu$ que es una función multiplicativa. Dado que

$$\mu(p^k)=\begin{cases} -1 & \text{si} \quad k=1 \\ 0 & \text{si} \quad k>1 \end{cases}$$

inmediatamente deducimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\prod_{p}(1-p^{-s}) \quad (\sigma>1)$$

Comparando con (5), podemos deducir de otra manera la fórmula (1).

Ejemplo: La función de Liouville λ es una función completamente multiplicativa tal que $\lambda(p) = -1$ para todo primo p. Entonces su función generatriz viene dada por:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1+p^{-s}} = \prod_p \frac{1-p^s}{1-p^{-2s}} = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} \ (\sigma > 1)$$

Otra manera de deducir esta fórmula es la siguiente: vimos que

$$q(n) = \sum_{d|n} \lambda(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ es un cuadrado} \\ 0 & \text{si} \quad n \text{ si no lo es} \end{cases}$$

Esto significa que $q = u * \lambda$ tiene la función generatriz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q(n)}{n^s} = \sum_{n:n=k^2} \frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2s}} = \zeta(2s)$$

y por lo tanto $\lambda = q * \mu$ tiene la función generatriz

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \ (\sigma > 1)$$