Introducción a la Teoría Analítica de Números

Pablo De Nápoli

clase 13

1. Teorema de los números primos para progresiones aritméticas

Teorema 1.1 *Para todo $q \geq 1$ y todo a coprimo con q, $\pi(x,q,a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} \frac{x}{\log x}$*

La prueba que daremos se basa en el siguiente teorema tauberiano visto anteriormente en el curso[1]:

Teorema 1.2 *Sea $f : [1,+\infty] \to \mathbb{R}$ una función nonegativa, continua a trozos y monótona creciente tal que $f(x) = O(x)$. Entonces su transformada de Mellin*

$$g(s) = s \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

existe para $Re(s) > 1$ y define una función analítica g. Si para alguna constante $c \in \mathbb{R}$ la función

$$\tilde{g}(s) = g(s) - \frac{c}{s-1}$$

tiene una extensión analítica a un entorno de la recta $Re(s) = 1$, entonces la integral impropia

$$\int_1^\infty \left(\frac{f(x)}{x} - c \right) \frac{dx}{x}$$

existe, y se tiene que

$$\frac{f(x)}{x} \to c \text{ cuando } x \to +\infty$$

Observación: La hipótesis sobre $\tilde{g}$ es equivalente a decir que g se extiende a una función analítica en un entorno de la recta $\mathrm{Re}(s) = 1$, salvo un polo simple en $s = 1$ con residuo c.

Prueba: Observemos en primer lugar que de acuerdo a un ejercicio de la práctica, la afirmación del enunciado es equivalente a

$$\psi(x,q,a) \sim \frac{1}{\varphi(q)} x$$

[1] Teorema tauberiano de Wiener-Ikehara. Corolario 7.3.2 en las notas del curso de variable compleja de R. Ash.

donde

$$\psi(x,q,a) = \sum_{n\leq x, n\equiv a \pmod{q}} \Lambda(n)$$

es una modificación de la función de Chebyshev.

Estamos pues en la situación ideal para aplicar el teorema tauberiano antes enunciado. Para ello debemos considerar la transformada de Mellin de la función de Chebyshev modificada:

$$g(s) = s\int_1^\infty \frac{\psi(x,q,a)}{x^{s+1}}\,dx$$

y probar que se extiende a una función analítica en un entorno de la recta $\mathrm{Re}(s) = 1$, salvo un polo simple en $s = 1$ con residuo

$$c = \frac{1}{\varphi(q)}$$

Con el objetivo de probar esta afirmación, debemos conectar a esta función con las L-series de Dirichlet. Para ello, partimos de la fórmula

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

para la derivada logarítmica de las L-series. Utilizando la fórmula de sumación de Abel, esta fórmula puede reescribirse en forma equivalente como una transformada de Mellin.

$$-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}) = s\int_1^\infty \frac{\psi(x,\chi)}{x^{s+1}}\,dx \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

donde

$$\psi(x,\chi) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$$

es otra modificación de la función de Chebyshev.

Pero ambas funciones de Chebyshev modificadas están relacionadas: en efecto a partir de las relaciones de ortogonalidad para los caracteres de Dirichlet, tenemos que:

$$\psi(x,q,a) = \sum_{n\leq x, n\equiv a \pmod{q}} \Lambda(n) = \sum_{n\leq x} \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(n)\overline{\chi(a)} \right) \Lambda(n)$$

donde la suma interior recorre los caracteres de Dirichlet módulo q. Cambiando el orden de las sumas encontramos que:

$$\psi(x,q,a) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \left(\sum_{n\leq x} \Lambda(n)\chi(n) \right) \overline{\chi(a)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \psi(x,\chi)\overline{\chi(a)}$$

A partir de esta fórmula, deducimos inmediatamente que

$$g(s) = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \left(s \int_1^{\infty} \frac{\psi(x,\chi)}{x^{s+1}}\, dx \right) \overline{\chi(a)} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \left(-\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)} \right) \overline{\chi(a)}$$

Ahora utilizamos lo que probamos en la clase anterior sobre las L-series: tenemos que $L(s,\chi) \neq 0$ si $\mathrm{Re}(s) = 1$ salvo si χ es el caracter principal χ y $s = 1$, mientras que $L(s,\chi_0)$ tiene un polo simple en $s = 1$. Se deduce que su derivada logarítmica

$$\frac{L'(s,\chi)}{L(s,\chi)}$$

es analítica en $\mathrm{Re}(s) = 1$, salvo un polo simple en $s = 1$ cuando $\chi = \chi_0$ y $s = 1$ con residuo -1 (por ser 1 el orden del polo de $L(s,\chi_0)$). Por lo tanto eligiendo

$$c = \mathrm{Res}(g, s = 1) = \frac{1}{\varphi q}$$

se satisfacen las hipótesis del teorema tauberiano y deducimos que

$$\frac{\psi(x,q,a)}{x} \sim \frac{1}{\varphi(q)} \text{ cuando } x \to +\infty$$

como queríamos demostrar.

$\square$