Los polinomios de Bernoulli y sus aplicaciones

Pablo De Nápoli

versión 0.1

1. Los polinomios de Bernoulli

Definición 1.1 *Los* **polinomios de Bernoulli** $B_k(x)$ *se definen como los coeficientesde la función generatriz*

$$\frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} z^k \ (|z| < 2\pi)$$

Es una función entera (tiene una singularidad evitable en $z = 0$), por lo que esta serie de potencias converge en todo el plano complejo. Se llama **números de Bernoulli** *a los números $B_k = B_k(0)$.*

El siguiente teorema prueba que las funciones $B_k(x)$ son efectivamente polinomios, y que están determinados por los números de Bernoulli:

Teorema 1.1 *Se cumple que:*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

Prueba: Tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} e^{xz} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \right)$$

y efectuando el producto de Cauchy, encontramos que:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n$$

Entonces, por la unicidad del desarrollo en serie de potencias, obtenemos que:

$$B_n(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

$\square$

Una regla para recordar este teorema es:

$$B_n(x) = (B+1)^n$$

donde las potencias B^k que aparecen al desarrollar el binomio, deben entenderse como los números de Bernoulli.

Teorema 1.2 *Para todo $n \geq 1$ se cumple que:*

$$\frac{dB_{n+1}(x)}{dx} = (n+1)B_n(x)$$

Prueba: Por el teorema anterior,

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k x^{n+1-k}$$

En consecuencia,

$$\frac{dB_{n+1}(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} B_k \ (n+1-k)x^{n-k}$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} = (n+1)B_n(x)$$

$\square$

Teorema 1.3 *Para todo $n \geq 0$ se cumple:*

1. *$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$. En particular, para $n \geq 2$, tenemos que: $B_n(0) = B_n(1)$.*
2. *Como consecuencia:*
$$x^n = \frac{B_{n+1}(x+1) - B_n(x)}{n+1} = \int_x^{x+1} B_n(t)dt$$
3. *Esto a su vez implica que:*
$$\sum_{k=1}^{m} k^n = \int_1^{m+1} B_n(x)\ dx = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}}{n+1}$$

Prueba: Tenemos que:

$$z\frac{e^{z(x+1)}}{e^z-1} - z\frac{e^{zx}}{e^z-1} = z\frac{e^{zx}e^z - e^{xz}}{e^z-1} = z\frac{e^{zx}(e^z-1)}{e^z-1} = ze^{zx}$$

Desarrollando ambos en serie la primera y la última de estas expresiones tenemos:

$$z\frac{e^{z(x+1)}}{e^z-1} - z\frac{e^{zx}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!} z^n, \quad ze^{zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1!}\, z^n$$

Utilizando la unicidad del desarrollo en serie de potencias se obtiene el resultado. □

Teniendo en cuenta que $B_n = B_n(0) = B_n(1)$ el teorema 1.1 nos proporciona la siguiente relación recursiva que permite calcular los números de Bernoulli:

Teorema 1.4 *Para $n \geq 2$, se cumple que:*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Podemos expresar esta fórmula simbólicamente como $B_n = (B+1)^n$.
Los primeros números de Bernoulli[1] son

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}$$
$$B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = 0, B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_9 = 0, \ldots$$

Los numeradores y denominadores de los números de Bernoulli crecen muy rápidamente por ejemplo

$$B_{30} = \frac{8615841276005}{14322}, \quad B_{40} = -\frac{261082718496449122051}{13530}$$

Teorema 1.5 *Si k es impar y $k \geq 3$, entonces $B_k = 0$*

Prueba: Consideramos

$$f(z) = \frac{z}{e^z-1} - 1 + \frac{z}{2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{B_k}{k!}$$

Notamos que f es par luego

$$f(z) - f(-z) = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} - \frac{z}{e^{-z}-1} + \frac{z}{2} = z\left(1 + \frac{-2+e^z+e^{-z}}{2-e^z-e^{-z}}\right) = 0$$

Por lo tanto, $B_k = 0$ para cualquier k impar con $k \geq 2$. □

Los primeros polinomios de Bernoulli[2] son:

$$B_0(x) = 1$$

[1] Calculados en SAGE con el comando **bernoulli**
[2] Calculados en SAGE con el comando **bernoulli_polynomial**

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}$$

2. Fórmula de Euler-Maclaurin

Los polinomios de Bernoulli son útiles para deducir una forma mejorada de la fórmula de sumación de Euler.

Pongamos $\overline{B}_n(x) = B_n(x - [x])$. Las funciones $\overline{B}_n$ se denominan funciones de Bernoulli.

Teorema 2.1 (Fórmula de Euler-Maclaurin) *Supongamos que* $C^{k+1}[a,b]$ *con* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{r=0}^{k} \frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b) - f^{(r)}(a)B_{r+1} + R_k$$

donde

$$R_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_a^b \overline{B}_{k+1}(t) f^{(k+1)}(t)\ dt$$

Prueba: Como en el caso de la fórmula de sumación de Euler, la idea básica es integrar por partes. Para $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que:

$$\int_n^{n+1} f(t)\ dt = \int_n^{n+1} f(t)\overline{B}_1'(t)dt$$

$$= f(n+1)\overline{B}_1((n+1)^-) - f(n)\overline{B}_1(n^+) - \int_{n+1}^{n} f(t)B_1(t)dt$$

donde notamos que, omo $\overline{B}_1(t)$ es discontinua en los enteros, al integrar por partes aparecen los límites laterales:

$$\overline{B}_1((n+1)^-) = \frac{1}{2}, \quad B_1(n^-) = -\frac{1}{2}$$

Sumando para $n = a, a+1, \ldots, b-1$ se tiene que:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \sum_{n=a}^{b-1} \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \int_a^b f'(t)\overline{B}_1(t)\ dt$$

En consecuencia:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b f'(t)\overline{B}_1(t)dt - \frac{f(b)-f(a)}{2} \tag{1}$$

que es el caso $k=0$ del teorema, ya que $B_1 = -\frac{1}{2}$.

Si f es de clase C^2, como $\overline{B}_2'(t) = 2\overline{B}_1(t)$ en el intervalo $(n, n+1)$ podemos volver a integrar por partes:

$$\int_n^{n+1} f'(t)\overline{B}_1(t)\ dt = \int_n^{n+1} f'(t)\frac{1}{2}\overline{B}_2'(t)\ dt = f'(n+1) - f'(n) - \frac{1}{2}\int_n^{n+1} \overline{B}_2(t)f(t)\ dt$$

(Ahora no tenemos que preocuparnos por los límites laterales pues como $B_n(0) = B_n(1)$ si $n \geq 2$, entonces $\overline{B}_n(t)$ es continua para $n \geq 2$).

Dado que $B_2(0) = B_1(0) = B_2$, sumando para $n = a, a+1, \ldots, b-1$ obtenemos que:

$$\int_a^b f'(t)\overline{B}_1(t)\ dt = (f'(b) - f'(a))B_2 - \frac{1}{2}\int_a^b f''(t)\overline{B}_2(t)\ dt$$

y reemplazando este resultado en (1), deducimos que:

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(t)\ dt - \frac{1}{2}\int_a^b f''(t)\overline{B}_2(t)\ dt$$
$$-\{(f(b)-f(a))B_1 + (f'(b) - f'(a))B_2\}$$

Esta es la fórmula del enunciado para $k=2$.

Integrando por partes sucesivas veces a partir de la relación $\overline{B}_n'(t) = nB_{n-1}'(t)$ en el intervalo $(n, n+1)$, podemos probar la fórmula del eneunciado por inducción en k. □

Ejemplo: Mejoremos el resultado sobre las sumas parciales de la serie armónica. Tomando $f(t) = \frac{1}{t}$, $a = 1$, $b = x$, $k = 2$ tenemos que:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x^3} - 1\right) - \int_1^x \frac{\overline{B}_3(t)}{t^4}\ dt$$

de modo que:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - - \int_1^x \frac{\overline{B}_3(t)}{t^4}\ dt + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2}$$

Como

$$\gamma = \lim_{x\to\infty}\left(\log x - \sum_{n\leq x}\frac{1}{n}\right)$$

haciendo que $x \to +\infty$, tenemos que:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \int_1^\infty \frac{\overline{B}_3(t)}{t^4}\, dt$$

donde la integral converge pues al ser $\overline{B}_3(t)$ acotada, podemos compararla con $\int_1^\infty \frac{1}{t^4}\, dt$. Por el mismo motivo:

$$\int_x^\infty \frac{\overline{B}_3(t)}{t^4}\, dt = O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

con lo que resulta que:

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{1}{2x} + \frac{1}{12x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Otro ejemplo: Si $z \in \mathbb{C}$ y $|arg(z)| < \pi - \delta$ donde $\delta > 0$, se tiene que

$$\sum_{j=0}^{n} \log(z+j) = \left(z + n + \frac{1}{2}\right)\log(z+n) - n - \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z + \int_0^n \frac{\overline{B}_1(x)}{z+x}$$

3. Los valores de la función zeta en los enteros pares

El siguiente teorema relaciona los valores de la función zeta en los enteros con los números de Bernoulli.

Teorema 3.1

$$\zeta(k) = \frac{1}{2}(-1)^{(k/2)+1}(2\pi)^k \frac{B_k}{k!} \quad \textit{para } k \textit{ par},\ n \geq 2$$

Por ejemplo $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, etc.

En particular, como $\zeta(n) > 0$, esto dice que los signos de los B_n con n par se alternan.

Daremos dos pruebas de este teorema: una utilizando análisis complejo, y otra utilizando series de Fourier.

3.1. Prueba utilizando análisis complejo

Consideramos la función

$$f(z) = \pi \cot(\pi z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}$$

tiene polos simples en los enteros, con residuo 1.

Consideramos el contorno C_N en el plano complejo que consiste en el borde del cuadrado de vértices $(N+1/2)(\pm 1 \pm i)$ (orientado positivamente). Por lo tanto

$$g(z) = \frac{1}{z^k} f(z)$$

tiene polos simples en los enteros $z = n$ con $n \neq 0$, con residuo $1/n^k$ Entonces por el teorema de los residuos

$$2\pi \int_{C_N} g(z)\, dz = \sum_{n=-N, k\neq 0}^{N} \frac{1}{n^k} + \mathrm{Res}(g(z), z=0)$$

Dado que k es par,

$$\sum_{n=-N, n\neq 0}^{N} \frac{1}{n^k} = 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^k}$$

Por otra parte, es fácil ver[3] que la función $f(z)$ es uniformemente acotada sobre el contorno C_N:

$$|f(z)| \leq A \;\forall\; z \in C_N$$

(con A independiente de N).

En consecuencia, utilizando la estimación usual:

$$\left| \int_{C_N} g(z)\, dz \right| \leq \frac{A}{(N+1/2)^k} \mathrm{long}(C_N) = \frac{A}{(N+1/2)^k} 4(2N+1) \to 0$$

cuando $to + \infty$, y se obtiene que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = -\frac{1}{2} \mathrm{Res}(g(z), z=0)$$

Nos queda pues, calcular este residuo: para ello observamos que utilizando las fórmulas de Euler:

$$\cot(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\mathrm{sen}(\pi z)} = i\, \frac{e^{\pi i z} + e^{-\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = i \coth(\pi i z)$$

Por otra parte, tenemos que:

$$\coth(z/2) = \frac{e^{z/2} + e^{z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{e^{-z/2}(e^z+1)}{e^{-z/2}(e^z-1)} = \frac{1}{z}\left(\frac{ze^z}{e^z-1} - \frac{z}{e^z-1} \right)$$

$$= \frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(1)}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(0)}{n!} z^n \right)$$

[3] ver por ejemplo [Spiegel], capítulo 7, problema 24

Pero como $B_n(1) = B_n(0) = B_n$ salvo si $n = 1$, y $B_n = 0$ si $n \geq 3$ es impar, deducimos que:

$$\operatorname{choth}(z/2) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-1}$$

En consecuencia obtenemos el siguiente desarrollo de Laurent,

$$g(z) = \pi \frac{\cot(\pi z)}{z^k} = \frac{2\pi i}{z^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2\pi i z)^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}(-1)^n \pi^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n-k-1}$$

y en particular mirando el término con $2n = k$:

$$\operatorname{Res}(g, z = 0) = \frac{2^k (-1)^{k/2} \pi^k B_k}{k!}$$

y por lo tanto

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{2} (-1)^{k/2+1} (2\pi)^k \frac{B_k}{k!}$$

si k es par.

3.2. Prueba mediante series de Fourier

Como las funciones $\overline{B}_n(x)$ son períodicas de período 1 admiten un desarrollo de Fourier. A partir del dearrollo de Fourier

$$\overline{B}_1(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{1} + \frac{\operatorname{sen}(4\pi x)}{3} + \ldots + \frac{\operatorname{sen}(6\pi x)}{3} + \ldots \right)$$

se obtiene por integraciones sucesivas que:

$$\overline{B}_k(x) = (-1)^{(k/2)+1} \frac{2(k!)}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{n^k} \quad \text{para } k \text{ par}$$

y

$$\overline{B}_n(x) = (-1)^{(k+1)/2} \frac{2(k!)}{(2\pi)^k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2\pi n x)}{n^k} \quad \text{para} k \text{ impar}$$

En particular evaluando el primero de estos desarollos en $x = 0$, obtenemos la fórmula del teorema .

Referencias

[Courant-John] R. Courant. F. John. Introducción al cálculo y al análisis matemático. Ed. Limusa. (1985). Volumen 1, Capítulo 8 (series trigonométricas).

[Apostol] T. Apostol, Introducción a la Teoría Analítica de Números. Ed. Reverté (1980).

[Ivorra] C. Ivorra. Teoría de Números. Disponible en `http://www.uv.es/ivorra/Libros/Numeros.pdf`

[Ram Murty] M. Ram Murty. Problems in analytic number theory. Graduate texts in mathematics ; 206. Berlin: Springer, 2001.

[Spiegel] M. Spiegel. Variable Compleja (serie Schaum). Mc. Graw-Hill, 1991.