
LISTA DE EJERCICIOS NÚMERO 3 **(Junio de 2011)**

---

1. Métodos variacionales (2da parte)

1. Probar, usando el Teorema del Paso de la Montaña, que existe una solución débil no trivial de la ecuación
$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$
donde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es regular y, para algún $1 < p < 2^* - 1$ verifica
$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^p), \qquad |f'(s)| \leq C(1 + |s|^{p-1})$$
con $C > 0$ una constante. Además, suponemos que existe $\gamma < \frac{1}{2}$ tal que
$$0 \leq F(s) \leq \gamma f(s) s$$
donde $F(s) = \int_0^s f(t)\,dt$ y, finalmente suponemos que,
$$a|s|^{p+1} \leq F(s) \leq A|s|^{p+1}.$$

En el siguiente ejercicio hay que usar el siguiente teorema (Teorema de trazas)

Teorema 1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto con borde suave y sea $1 \leq p < 2_* := \frac{2(N-1)}{N-2}$. Entonces se tiene que*
$$L^p(\partial\Omega) \subset\subset H^1(\Omega).$$

2. *a*) Probar que $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = 0 & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = |u|^{p-2}u & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$
si y sólo si es un punto crítico del funcional
$$I(w) = \frac{1}{2}\int_\Omega |Dw|^2 + |w|^2\,dx - \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega} |w|^p\,dS.$$

   b) Probar que el funcional I dado en (a) tiene un punto crítico si $p \neq 2$. (Sugerencia: separar en casos $1 < p < 2$ y $p > 2$). ¿Qué sucede si $p = 2$?

---

3. **Problema del Obstáculo** Sea $\mathcal{A} := \{w \in H_0^1(\Omega) \,|\, w \geq h \text{ c.t.p. } \Omega\}$ donde $h : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función regular llamada el *obstáculo*. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ regular y asumamos que el conjunto de funciones admisibles $\mathcal{A}$ es no vacío.

   a) Probar que existe una única función $u \in \mathcal{A}$ que verifica

   $$I(u) = \inf_{w \in \mathcal{A}} I(w),$$

   donde

   $$I(w) := \int_\Omega \frac{1}{2}|Dw|^2 - fw \, dx.$$

   b) Probar que u verifica la siguiente *desigualdad variacional*

   $$\int_\Omega Du \cdot D(w-u)\, dx \geq \int_\Omega f(w-u)\, dx,$$

   para toda $w \in \mathcal{A}$.

   c) Probar que si $u \in W^{2,\infty}(\Omega)$ se tiene que

   $$O := \{x \in \Omega \,|\, u(x) > h(x)\}$$

   es abierto, y

   $$C := \{x \in \Omega \,|\, u(x) = h(x)\}$$

   es (relativamente) cerrado. Más aún, probar que $u \in C^\infty(O)$,

   $$-\Delta u = f \qquad \text{en } O$$

   y

   $$-\Delta u \geq f \qquad \text{en c.t.p.de } \Omega.$$

Aclaración: El siguiente es un ejercicio optativo que apunta a relacionar los conceptos de esta materia con los de geometría diferencial.

4. **Problema de las geodésicas** Sea $M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$ una superficie en $\mathbb{R}^3$ dada por los ceros de una función g de clase C^2. Asumimos que M es una superficie regular (es decir que $\nabla g(p) \neq 0$ para todo $p \in M$). Dados dos puntos $p, q \in M$ consideramos el espacio

   $$X = \big\{\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) : [a,b] \to M : \gamma \text{ de clase } C^2\ \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\big\}$$

   y los funcionales longitud $L : X \to \mathbb{R}$ y energía $E : X \to \mathbb{R}$ de una curva dados por:

   $$L(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt \quad E(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma(t)|^2\, dt$$

   a) Probar que si $\gamma \in X$, el espacio tangente a X en γ (que notaremos $T_\gamma X$) está dado por los campos vectoriales a lo largo de la curva γ. (Darle un sentido preciso a esta afirmación).

b) Probar que si γ minimiza L sujeto a la condición $\gamma \in X$, entonces existe una función $\lambda(t)$ (multiplicador de Lagrange) tal que se cumplen las siguientes ecuaciones (ecuaciones de Euler-Lagrange)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}}\right] = \lambda(t)G_x(x(t),y(t),z(t))$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}}\right] = \lambda(t)G_y(x(t),y(t),z(t))$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2+\dot{z}(t)^2}}\right] = \lambda(t)G_y(x(t),y(t),z(t))$$

Una curva que satiface estas ecuaciones se denomina una geodésica.

Interpretar esta condición geométricamente (Si la curva minimizante γ está parametrizada por longitud de arco, estas ecuaciones dicen que la *derivada covariante* de su vector tangente $\dot{\gamma}(t)$ [es decir la proyección sobre el subespacio tangente $T_{\gamma(t)}M$ a M en cada punto del vector aceleración $\ddot{\gamma}(t)$]es nula.

c) Obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para un minimizante del funcional de energía E restringido a X y compararlas. ¿Qué conclusión se obtiene?

2. Métodos de Punto Fijo

5. Consideremos el siguiente problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -\Delta u + b(Du) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usar el Teorema de punto fijo de Banach para mostrar que existe una única solución débil $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ donde $b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si la constante de Lipschitz $\mathrm{Lip}(b)$ es suficientemente pequeña.

6. Sean $1 < p < \infty$. Consideramos el siguiente problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $1 < p < +\infty$, y $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\Delta u|^p$. Supongamos que f es una función de Caratheodory que verifica

$$|f(x,s)| \le C|u|^{q-1} + b(x) \quad \text{para} \quad x \in \Omega, s \in \mathbb{R}$$

donde $q \in (1, p^*)$ y $b \in L^{q'}(\Omega)$. Utilizar el teorema de punto fijo de Schauder para probar la existencia de soluciones para este problema en $W_0^{1,p}(\Omega)$.

7. Para cada $g \in L^2(\Omega)$, consideramos u la solución débil de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u = g & \text{en } \Omega \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

donde $f \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$ para cada $T > 0$. Supongamos que f es periódica en t con período τ, es decir, $f(x,t) = f(x, t+\tau)$ $(x \in \Omega,\ t \geq 0)$. Probar que existe una única función $g \in L^2(\Omega)$ tal que la correspondiente solución u es τ-periódica.

8. **Una versión del teorema de Leray-Schauder** Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ un operador no lineal compacto. Supongamos que existe un $r > 0$, tal que si $\|x\| = r$, $Tx \neq \lambda x$ para todo $\lambda > 1$.

   [Ayuda: definir una retracción $\rho : X \to B_r = \{x \in X : \|x\| \leq r\}$. Considerar $\tilde{T} = \rho \circ T$, y aplicarle el teorema de punto fijo de Schauder]