
LISTA DE EJERCICIOS NÚMERO 2 **(Mayo de 2011)**

---

1. Métodos variacionales

1. Consideremos el operador diferencial:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}u_{x_i}\right)_{x_j} + cu,$$

donde $a_{ij}, c \in L^\infty(\Omega)$ y la matriz $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es simétrica (i.e. $a_{ij} = a_{ji}$) y uniformemente elíptica es decir, existe $c > 0$ tal que :

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge c|\xi|^2 \;\forall x \in \Omega, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Pruebe que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilinear $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si

$$c(x) \ge -\mu \quad \text{c.t.p. } U.$$

---

2. Hallar una formulación débil para la ecuación bi-armónica

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Probar la existencia y unicidad de soluciones débiles para ese problema.

---

3. Supongamos que Ω es conexo. Dar una definición de solución débil para el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que existe solución débil para este problema si y sólo si

$$\int_U f\,dx = 0.$$

¿Qué puede decir sobre la unicidad?

4. Consideramos el problema de autovalores de Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que existe una sucesión de autovalores $\lambda_n \to +\infty$ con $\lambda_0 = 0$, y que las correspondientes autofunciones φ_n son una base ortormal de $L^2(\Omega)$.

---

5. De una definición de solución débil para el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\partial\Omega)$. Pruebe que este problema tiene solución si y sólo si

$$\int_{\partial U} f \, dS = 0.$$

¿Qué puede decir de la unicidad?

---

6. Estudie el problema de autovalores de Steklov:

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } U \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda u & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

---

7. Probar, minimizando un funcional adecuado, que existe una solución débil no trivial del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1} u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $0 < p < 1$.

---

8. Sea $1 < p < \infty$. Probar que existe una única $u \in W_0^{1,p}$ solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f \in L^{p'}(\Omega)$ es dada y $\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du)$ es el $p-$laplaciano. Verificar que además se tiene la estimación

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}^{p'/p}.$$

Obs: Notar que si $p \neq 2$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ no es un espacio de Hilbert. sin embargo, cuando $1 < p < +\infty$ es un espacio de Banach reflexivo y separable. Eso es suficiente para garantizar que si (u_n) es acotada en $W_0^{1,p}$, exista una subsucesión débilmente convergente.

---

9. Explicar por qué los métodos variacionales no funcionan para probar la existencia de un minimizante del funcional

$$I(w) = \int_\Omega \left(1 + |Dw|^2\right)^{1/2} \, dx$$

sobre $\mathcal{A} = \{w \in W^{1,q}(\Omega) \,|\, w = g \text{ en } \partial\Omega\}$, para algún $1 \leq q < \infty$.

observación: $W^{1,1}(\Omega)$ no es reflexivo.

---

2. Espacios de Sobolev fraccionarios definidos por medio de la transformada de Fourier

10. Tomemos $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ no idénticamente nula, y consideremos una sucesión (a_j) en $\mathbb{R}^n$ con $|a_j| \to +\infty$. Sea $\phi_j(x) = \phi(x - a_j)$. Mostrar que (phi_j) es una sucesión acotada en $H^s(\mathbb{R}^n)$ pero no tiene ninguna subsucesión convergente en $H^t(\mathbb{R}^n)$ para ningún $t \geq 0$. Concluir que la inmersión

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^t(\mathbb{R}^n) \text{ si } 0 \leq t < s$$

nunca es compacta.

11. Utilizar la desigualdad de Hausdorff-Young para la transformada de Fourier

$$\|\widehat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \text{ para } 1 \leq p \leq 2$$

para probar la siguiente inmersión de Sobolev

$$H^s(\mathbb{R}^n) \leq L^p(\mathbb{R}^n) \text{ si } s < \frac{n}{2} \text{ y } p < \frac{2n}{n-2s}$$

12. (teorema de traza para H^s sobre un subespacio de codimensión k). Sean $1 \leq k < n$. consideremos $\mathbb{R}^n$ como $\mathbb{R}^{n-k} \times R^k$. Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (el espacio de Schwartz) podemos definir el operador de traza $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ por

$$Tf(y) = f(y, 0)$$

Probar que si $s > \frac{k}{2}$, el operador T se puede extender a un operador acotado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ en $H^{s-(k/2)}(\mathbb{R}^n)$.

13. Sea $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Probar que el operador de multiplicación por ϕ (dado por $f \mapsto f\phi$) es acotado en $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Sugerencia: Consideramos el operador $\Lambda^s = (I - \Delta)^{s/2}$ definido por medio de la fransformada de Fourier

$$\widehat{\Lambda^s f} = (1 + |\omega|^2)^{s/2} \widehat{f}(\omega)$$

El enunciado del ejercicio es equivalente a probar que el operador $T = \Lambda^s \phi \Lambda^{-s}$ es acotado en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Probarlo a partir de una representación integral de T.