
Lista de ejercicios número 1 (Marzo de 2011)

ESPACIOS DE SOBOLEV

---

1. **Espacios de Sobolev en dimensión** $n = 1$ Sean $I = (a, b)$ un intervalo de la recta y $1 \leq p < \infty$,

   i) Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$ entonces u coincide en casi todo punto con una función absolutamente continua y que u' (que existe en sentido clásico en c.t.p.) coincide con la derivada débil en c.t.p.

   ii) Muestre que si $u \in W^{1,p}(0, 1)$, entonces se tiene la estimación
   $$|u(x) - u(y)| \leq |x - y|^\alpha \Big(\int_a^b |u'|^p \, dt \Big)^{1/p},$$
   para casi todo $x, y \in [0, 1]$, donde $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$, de modo que se tiene una inmersión $W^{1,p}(I) \subset C^\alpha(\overline{I})$.

   iii) Deducir que se tiene una inmersión compacta $W^{1,p} \subset C(\overline{I})$. [La compacidad de la inmersión significa que si (u_n) es una sucesión acotada en $W^{1,p}(I)$, existe una subsucesión (u_{n_k}) convergente en $C(\overline{I})$]

---

2. Muestre que $\chi_{B_1(0)}(x)$ no está en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Más aún, muestre que dicha función no tiene derivada débil (en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$).

---

3. *a*) ¿Para qué valores de $\alpha > 0$ vale que $u(x) := |x|^{-\alpha}$ pertenece a $W^{1,p}(B_1(0))$?

   b) Para $n > p$, construya una función de $W^{1,p}(B_1(0))$ que no es acotada en ningún subconjunto abierto de $B_1(0)$.

---

4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Pruebe que $W^{k,p}(U)$ es un espacio de Banach, y que si $p < \infty$ es separable.

---

5. i) Muestre que $C_c(0, 1)$ no es denso en $W^{1,p}(0, 1)$.

   ii) Sea $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 1, 0 < y < 1\}$ y consideramos
   $$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$
   Probar que $u \in W^{1,p}(U)$ pero que sin embargo u no puede aproximarse en la norma de dicho espacio por funciones en $C^1(\overline{U})$. ¿Porqué no se aplica el teorema de densidad visto en clase?

6. Pruebe la siguiente fórmula (utilizada en la prueba del teorema de aproximación local):
$$D^\alpha u^\epsilon = \rho_\epsilon * D^\alpha u,$$
donde $u \in W^{k,p}(U)$, $|\alpha| \leq k$, $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)$ y $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

---

7. Mostrar que el teorema de extensión visto en clase para $W^{1,p}(U)$ provee un operador de extensión para $W^{2,p}(U)$ también, si $\partial U \in C^2$.

---

8. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con F' acotada. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 < p < \infty$. Pruebe que
$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u)u_{x_i} \ (i = 1, \dots, n).$$

---

9. Sean $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado.

   a) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$.

   b) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y
   $$Du^+ = \begin{cases} Du & \text{en c.t.p. donde}\{u > 0\} \\ 0 & \text{en c.t.p. donde } \{u \leq 0\} \end{cases}, \qquad Du^- = \begin{cases} 0 & \text{en c.t.p. donde } \{u \leq 0\} \\ Du & \text{en c.t.p. donde } \{u > 0\} \end{cases}.$$

   c) Pruebe que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $Du = 0$ en c.t.p. donde $\{u = 0\}$.

---

10. Pruebe la siguiente desigualdad de interpolación:
$$\int_U |Du|^2\,dx \leq C\Big(\int_U u^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int_U |D^2u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$
para toda $u \in H^2(U) \cap H_0^1(U)$ con C independiente de u.

---

11. Muestre que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo y $u \in W^{1,p}(U)$ verifica que $Du = 0$ c.t.p. U, entonces u es constante c.t.p. U.

---

12. Pruebe la siguiente desigualdad de Poincaré:
$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C\|Du\|_{L^p(U)},$$
para toda $u \in W^{1,p}(U)$, $1 \leq p \leq \infty$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con frontera de clase C^1, $C = C(n, p, U)$ y
$$(u)_U := \frac{1}{|U|}\int_U u\,dx$$
es el promedio de u sobre U.

---

13. En el intervalo $I = (0, 2\pi)$ consideramos los espacios de Sobolev fraccionarios definidos por medio de series de Fourier para $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ del siguiente modo: si $u \in L^2$ consideramos su serie de Fourier

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

siendo

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) e^{-inx} \, dx$$

(la serie converge en $L^2(I)$), y definimos el espacio $H^s(I)$ por

$$H^s(I) = \left\{ u \in L^2(I) : \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^{2s} |c_n|^2 < +\infty \right\}$$

con la norma

$$\|u\|_{H^s} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|)^{2s} |c_n|^2 \right\}^{1/2}$$

a) Probar que $H^s(I)$ es un espacio de Hilbert (definiendo para ello, un producto interno adecuado).

b) Probar que si $s \in \mathbb{N}_0$, $H^s(I)$ coincide con $W^{s,2}(I)$.

c) Probar que si $s > 1/2$ se tiene la inmersión

$$H^s(I) \subset C(\overline{I})$$

y que dicha inmersión es compacta.
