Desigualdades Clásicas en el Análisis (materia optativa)
Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 2 - Convolución - Transformada de Fourier- Interpolación - Desigualdades de Sobolev

Ejercicio 1. Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$, donde $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{t\geq 0} \to \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \\ u(x,0) &= u_0(x) = 0 \end{cases}$$

Probar que la solución dada por el semigrupo del calor

$$u(x,t) = e^{t\Delta} u_0$$

verifica la estimación:

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^q} \leq C\ t^{-\alpha} \|u_0\|_{L^p}$$

cuando $1 \leq p \leq q \leq \infty$, donde C y α son independiente de f y t. ¿Cuánto debe valer α ?

Ejercicio 2. Consideremos en cambio la ecuación del calor para $u(x,t)$ $x \in [0,L]$, con las condiciones de frontera de Neumann

$$u_x(0) = u_x(L) = 0$$

Utilizar las series de Fourier para expresar su solución. Probar que si

$$\overline{f} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx$$

entonces

$$\|f - \overline{f}\|_{L^2} \leq C\ e^{-\lambda t} \|f\|_{L^2}$$

¿Cuánto vale λ ?

Ejercicio 3. Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ verifica que $\widehat{f}$ está soportada en una bola $B(0,R)$ y $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Probar que f es C^∞ y verifica una estimación de la forma

$$\|f\|_{L^q} \leq C\ R^\alpha\ \|f\|_{L^p}$$

donde C y α son independiente de f y R. ¿Cuánto debe valer α ?

Ejercicio 4. Consideramos el problema de valores iniciales para la ecuación de Schrödinger, donde $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} u_t &= i\Delta u \\ u(x,0) &= u_0(x) \end{cases}$$

i) Utilizando que la transformada de Fourier, encontrar una solución (suponiendo f en la clase de Schwarz). Verificar que esta puede expresarse formalmente como

$$u(x,t) = e^{it\Delta} u_0(x) \text{ (semigrupo de Schrödinger)}$$

ii) Comprobar que la norma L^2 se preserva en el tiempo, o sea que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$$

iii) Por otro lado, comprobar que para $t > 0$,

$$u(x,t) = K_t * u_0$$

donde K_t es un núcleo. (Sugerencia: comparar con la ecuación del calor). Deducir la estimación de tipo fuerte $(1,\infty)$,

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leq C\, t^{-n/2}\, \|u_0\|_{L^1}$$

iv) (Desigualdad de Strichartz) Interpolando, probar la estimación de tipo fuerte (p,p') para $1 \leq p \leq 2$.

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^{p'}} \leq C t^{-\alpha}\, \|u_0\|_{L^p}$$

¿Cuánto vale el exponente α ?

Ejercicio 5. Utilizando la transformada de Fourier, probar la siguiente desigualdade de Gagliardo Nirenberg: si $n \geq 2$, $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^q} \leq C\, \|u\|_{L^2}^{\theta}\, \|\nabla u\|_{L^2}^{1-\theta}$$

donde $2 \leq q < \frac{2n}{n-2}$. ¿Cuánto debe valer θ ? Similarmente, si $n \geq 2$, $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\|u\|_{L^q} \leq C\, \|u\|_{L^2}^{\theta}\, \|\Delta u\|_{L^2}^{1-\theta}$$

para $2 \leq q < \frac{2n}{n-4}$.

Ejercicio 6. [Teorema de inmersión de Morrey] Sea $H^s = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\omega|^2)^{s/2} \widehat{f}(\omega)|^2\, d\omega < \infty \right\}$. Probar que si $f \in H^s$, $\alpha = s - \frac{n}{2}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces f es Hölder α, esto es:

$$|f(x) - f(y)| \leq C\, \|f\|_{H^s}\, |x-y|^\alpha$$

Deducir que cualquier sucesión (f_n) acotada en H^s tal que todas las f_n se anulan fuera de un conjunto compacto K (fijo), tiene una sub-sucesión uniformente convergente.

Ejercicio 7. Generalizar el resultado anterior para el espacio

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{ f : f = G_s * g \text{ con } g \in L^p(\mathbb{R}^n) \}$$

Aquí G_s denota el potencial de Bessel.

Ejercicio 8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Notamos

$$\overline{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x)\, dx$$

Para $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $1 < p \leq \infty$, probar la desigualdad de Sobolev-Poincaré:

$$\int_\Omega |f(x) - \overline{f}|^p\, dx \leq C \int_\Omega |f(x)|^p\, dx$$

Sugerencia: Probar primero que $|f(x) - \overline{f}| \leq C\, I_1(\nabla f)(x)$ donde I_1 denota la integral fraccionaria de orden 1 (y extendemos f por cero fuera de Ω)