Desigualdades Clásicas en el Análisis (materia optativa)
Primer Cuatrimestre de 2018

Práctica 1 - Funciones Convexas

Ejercicio 1. Probar el **criterio de convexidad** para funciones vectoriales: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto convexo, y $f : \Omega \to \subset \mathbb{R}$. Entonces

i) Si f es de clase C^1, entonces f es convexa si y sólo si su gradiente $\nabla f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es una función monótona en el siguiente sentido:

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall\, x, y \in \Omega$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar.

ii) Si f es de clase C^2, entonces f es convexa si y sólo si $D^2 f(x)$ (Hessiana de f en x) es una forma cuadrática semidefinida positiva en cada punto $x \in \Omega$.

Ejercicio 2. [desigualdad de Mahler] Si (x_k) e (y_k) son sucesiones de nùmeros positivos, entonces

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^{1/n} \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n} + \prod_{k=1}^{n} y_k^{1/n}$$

Ejercicio 3. Probar que la función gama, definida por la integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \quad x > 0$$

es logarítmicamente convexa (esto es: $\log \Gamma(x)$ es convexa).

Nota: El teorema de Bohr-Mollerup caracteriza a la función gama como la única solución en $(0, +\infty)$ de la ecuación funcional $f(x+1) = xf(x)$ con la condición $f(1) = 1$ que es logarítmicamente convexa.

Ejercicio 4. [Desigualdades de Young y de Hölder reversas] Supongamos que $p \in (-\infty, 1)$, $p \neq 0$ y que $1/p + 1/q = 1$. Probar que:

i) Si $x.y > 0$, entonces

$$xy \geq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

ii) Si $a_1, a_2, \ldots a_n$ y $b_1, b_2, \ldots b_n$ son nùmeros complejos no nulos, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \geq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{1/q}$$

Ejercicio 5. [Desigualdad de Hardy discreta] Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales no negativos que no son todos cero, y $1 < p < \infty$, probar que:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \right)^{1/p} < \frac{p}{p-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p \right)^{1/p}$$

Sugerencia: deducirla de la versión continua.

Ejercicio 6.

i) Probar la desigualdad de Pólya-Knopp, que es un caso límite de la desigualdad de Hardy. Si $f \in L^1(0,\infty)$, $f \geq 0$ y f no es idénticamente cero, probar que

$$\int_0^\infty \exp\left(\frac{1}{x}\int_0^x \log f(x)\, dt\right) < e\int_0^\infty f(x)\, dx$$

ii) Probar la desiguladad de Carleman: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ no son todos nulos, entonces

$$\sum_{n=1}^\infty (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n} < e\sum_{n=1}^\infty a_n$$

Ejercicio 7. [Desigualdad de Hermite-Hadamard] Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa, entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Ejercicio 8. Verificar la siguente tabla de funciones convexas conjugadas (en una variable):

$f(x)$	$f^*(y)$
$\frac{\lvert x\rvert^p}{p} \quad (p>1)$	$\frac{\lvert x\rvert^q}{q} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$
$(1+x^2)^{1/2}(x\in\mathbb{R})$	$--(1.y^2)^{1/2} \quad y\in[-1,1]$
$e^x(x\in\mathbb{R})$	$y\log(y)-y \quad (y>0), f^*(0)=0$
$-\log x \quad (x>0)$	$-1-\log(-y) \quad (y<0)$

Aplicaciones a desigualdades en teoría de la información

Ejercicio 9. [Desigualdad Log-Sum] Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ números reales no negativos. Probar que

$$\sum_{i=1}^n a_i \log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq \sum_{i=1}^n a_i \log\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i}$$

En particular si $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$, obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n a_i \log\left(\frac{a_i}{b_i}\right) \geq 0$$

Ejercicio 10. Dadas dos distribuciones de probabilidad discretas $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ y $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ en un espacio de probabilidad discreto con n elementos, esto es

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n q_i = 1, p_i \geq 0, q_i \geq 0$$

su entropía relativa o divergencia de Kullback-Leibler entre ellas, se define por

$$H(P||Q) = \sum_{i=1}^n p_i \log\left(\frac{p_i}{q_i}\right)$$

Por el ejercicio anterior esto es ≥ 0. Probar que la entropía relativa es convexa, esto es: si P_1, P_2, Q_1, Q_2 son distribuciones discretas en un espacio discreto de n elementos, y $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$H(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2||\lambda Q_1 + (1-\lambda)Q_2) \leq \lambda H(P_1||Q_1) + (1-\lambda)H(P_2||Q_2)$$

Las hipótesis se mantienen en los ejercicios siguientes.

Ejercicio 11. [Desigualdad de Pinsker] Sea $\|P - Q\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$. Probar que

$$H(P||Q) \geq \frac{1}{2}\|P - Q\|_1^2$$

Ejercicio 12. [Fórmula de dualidad para la entropía relativa] Probar que

$$H(P||Q) = \sup_{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)} \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \log \left(\sum_{i=1}^{n} e^{x_i} q_i \right) \right\}$$

Sugerencia: fijados $q_1, q_2, \ldots, q_n$ considerar a $H(P||Q)$ como una función convexa de $p_1, \ldots, p_n$. Calcular su función convexa conjugada f^* y usar que $(f^*)^* = f$.

Nota: Las desigualdades de esta sección se generalizan a distribuciones de probabilidad continuas, pero por simplicidad preferimos enunciarlas en el contexto discreto.