Un ejemplo de la teoría de fractales

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Introducción

¿Cuán complicada puede ser la función de distribución de una variable aleatoria? Los ejemplos que vimos hasta ahora son siempre funciones continuas a trozos. ¡Pero ahora vamos a ver que pueden ser mucho más complicadas!
El ejemplo que vamos a ver es de gran utilidad en la materia Análisis Real (¡de hecho, cuando estoy yo, lo ponemos en la práctica cero!). Pero vamos a verlo desde el punto de vista de la teoría de probabilidades.

Recordamos: cómo elegir un número al azar

En la clase 2, consideramos el siguiente método para elegir un número real al azar en $[0,1]$ con distribución uniforme. Consideramos el experimento de arrojar infinitas veces la moneda que modelamos mediante el espacio muestral Ω^∞ de las sucesiones de ceros y unos. Y supongamos que tenemos una realización $\omega \in \Omega^\infty$ de este experimento que corresponde a una sucesión infinita de ceros y unos.

Le asociaremos un punto $X(\omega) \in [0,1]$ mediante un proceso infinito consistente en construir un encaje de intervalos cerrados

$$I_0 = [0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

En cada paso, para construir I_k subdividimos I_{k-1} en mitades iguales, y elegimos I_k como la mitad de la izquierda si $\omega_k = 0$ (sale ceca), o la de la derecha $\omega_k = 1$ (sale cara) en la k-ésima realización del experimento.

Por el principio de encaje de intervalos existe un único número real

$$X(\omega) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$$

Así pues: a cada realización de nuestro experimento aleatorio le corresponde un número real $X : \Omega^\infty \to [0,1]$ que como ya vimos, resulta una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$.

Una variación

Ahora hagamos lo mismo, pero definamos los I_k por otra regla:
Empezamos por $I_0 = [0, 1]$, y en cada paso, para construir I_k subdividimos I_{k-1} en tercios, y elegimos I_k como la el tercio de la izquierda si $\omega_k = 0$ (sale ceca), o la de la derecha $\omega_k = 1$ (sale cara) en la k-ésima realización del experimento.
Podemos formalizar esto así: definamos las funciones

$$T_0(x) = \frac{1}{3}x, \quad T_1(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Entonces

$$I_k = T_{\omega_k}(I_{k-1})$$

De nuevo, por el principio de encaje de intervalos existe un único número real

$$X(\omega) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$$

¿Cuál es la distribución de X ahora?

El conjunto de Cantor

Definimos una sucesión de conjuntos $F_n \subset [0,1]$ por inducción

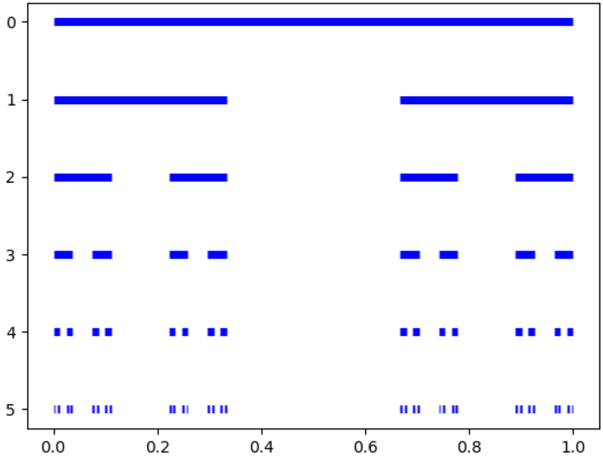
$$F_0 = [0,1], \quad F_n = T_0(F_{n-1}) \cup T_1(F_{n-1}) \; (n \geq 1)$$

y definimos el conjunto ternario de Cantor como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

1. C es un compacto, y $C = T_1(C) \cup T_2(C)$ (Esta última propiedad suele expresarse diciendo que C es *auto-similar*).
2. Para cada $\varepsilon > 0$ es posible cubrir a C con finitos intervalos tales que sus longitudes suman menos que ε. Esto dice que su medida de Lebesgue (longitud) es cero.
3. Un número real $x \in [0,1]$ pertenece a C si y sólo si admite un desarrollo en base 3 de la forma
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \text{ donde } d_n = 0 \text{ o } d_n = 2 \text{ para cada } n$$
4. C tiene cardinal c (el cadinal de $\mathbb{R}$).

El conjunto de Cantor (2)



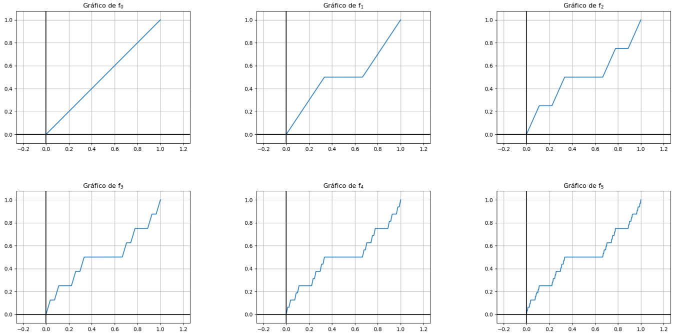
La función de Cantor-Lebesgue

Similarmente definimos inductivamente una sucesión de funciones $F_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$F_0(x) = x \text{ para todo } x \in [0,1]$$

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} F_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0,1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3,2/3] \\ \frac{1}{2} F_{n-1}(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3,1] \end{cases} \quad \text{para todo } n \geq 1$$

La función de Cantor-Lebesgue (2)



La función de Cantor-Lebesgue (3)

(a) $F_n(0) = 0, \quad F_n(1) = 1$ y f_n es continua y monótona creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $|F_n(x) - F_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) F_n converge uniformemente en $[0,1]$ hacia una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ que llamamos la función de Cantor-Lebesgue que verifica la propiedad de autosimilaridad

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F(3x) & \text{si } x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{1}{2}F(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3, 1] \end{cases}$$

(d) F es monótona creciente, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$.

(e) F es constante en cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor

Entonces...

Resulta que $X(\omega)$ es un punto del conjunto ternario de Cantor.
Podemos describir $X(\omega)$ explícitamente usando los desarrollos en base 3

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\omega_k}{3^k}$$

Su función de distribución F_X resulta ser la función de Cantor-Lebesgue F. ¡Las funciones de distribución pueden ser mucho más patológicas que las de los ejemplos que vimos hasta ahora!
Aunque este ejemplo no tiene aplicaciones en estadística, sí es un ejemplo importante en la matemática actual en conexión con la teoría de fractales.
¿Cómo podemos calcular su esperanza?
Este ejemplo nos va a ser útil para jugar un poco con las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes.

´

Respuesta

$$E[X] = \int_0^1 x\, dF(x) = \int_0^{1/3} x\, dF(x) + \int_{2/3}^1 x\, dF(x)$$

En la primera integral, hacemos el cambio de variable $x = T_0(y) = \frac{1}{3}y$. Luego $y = T_0^{-1}(x) = 3x$. Usando la autosimilaridad de F nos queda:

$$\int_0^{1/3} x\, dF(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}y\, dF(\frac{1}{3}y) = \int_0^1 \frac{1}{3}y\, d\left(\frac{1}{2}F(y)\right) = \frac{1}{6}E(X)$$

Similarmente, haciendo el cambio de variable $x = T_1(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}$. Luego $z = T_1^{-1}(x) = 3(x - \frac{2}{3}) = 3x - 2$

$$\int_{2/3}^1 x\, dF(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right)\, dF\left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right) = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right)\, dF\left(\frac{1}{2}F(z) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right)\, dF\left(\frac{1}{2}F(z)\right)$$

Respuesta (2)

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right) \, dF\left(\frac{1}{2}F(z)\right) = \frac{1}{6}\int_0^1 z dF(z) + \frac{1}{3}\int_0^1 dF(z)$$
$$= \frac{1}{6}E(X) + \frac{1}{3}$$

Reemplazando

$$E(X) = \frac{1}{6}E(X) + \frac{1}{6}E(X) + \frac{1}{3}$$

o sea:

$$\frac{2}{3}E(X) = \frac{1}{3}$$

y por lo tanto

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

Otra forma

¡Este resultado se puede probar también usando que la distribución de la variable X es simétrica respecto al punto $1/2$! (o sea X e $1 - X$ tienen la misma distribución).

Ejercicios para ustedes:

- ¿Cómo justificarían esta última afirmación?
- ¿cómo calcularían la varianza de X?