Paseos al Azar y la Ecuación del Calor

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Más sobre paseos al azar

Introducción

En la case anterior hablamos de los paseos al azar, y de como podìan usarse para dar una interpretación microscópica de una ecuación en derivadas parciales desde el punto de vista de la teoría de probabilidades.

Me va a interesar hoy mirar más de cerca esta idea usando algunas de las herramientas que desarrollamos a lo largo del curso, lo cuál nos va a servir para repasar e integrar algunos de los conceptos.

Paseos al azar unidimensionales

En la clase anterior, consideramos paseos al azar bidimensionales. Pero la misma idea puede considerarse en cualquier número de dimensiones.
Consideremos para simplificar el caso unidimensional. Consideramos la grilla dada por los múltiplos enteros de un parámetro $h > 0$, $G_h = h\mathbb{Z}$.
Vamos a considerar una partícula que se mueve por esta grilla, en ciertos tiempos $t_n = nk$ donde $k > 0$ es otro parámetro. Llamamos $T_k = k\mathbb{N}_0$ al conjunto de tiempos que vamos a considerar-
La partícula comienza en tiempo $t_0 = 0$ en una cierta posición $X_0 = x_0$ y después se mueve al azar según la regla.

$$X_{t_n} = \begin{cases} X_{t_{n-1}} + h & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \\ X_{t_{n-1}} - h & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \end{cases}$$

Podemos pensar que en cada tiempo discreto t_n tiramos una moneda y decidimos si ir para la izquierda o para la derecha una distancia h según el resultado de la moneda. Asumimos que las distintas tiradas de la moneda son independientes.

Paseos al azar unidimensionales (2)

¿Cómo podríamos encontrar la distribución de X_{t_n} ? Podemos escribir

$$X_{t_n} = X_{t_{n-1}} + hU_n$$

donde la U_n son variables aleatorias independientes, con distribución de Rademacher

$$U_n = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \\ -1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \end{cases}$$

Luego:

$$X_{t_n} = X_0 + h(U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$$

Podemos escribir $U_n = 2V_n - 1$ donde $V_n \sim \text{Be}(1/2)$.

$$V_n = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \\ 1 & \text{con probabilidad} \quad 1/2 \end{cases}$$

Paseos al azar unidimensionales (3)

Luego

$$X_{t_n} = x_0 + [2(V_1 + V_2 + \ldots + V_n)n]h = x_0 + [2S_n - n]h$$

donde S_n representa el número de éxitos en n ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $1/2$, $S_n \sim \text{Bi}(1/2)$.
Podemos enconteces escibir una fórmula para la distribución de X_{t_0}.

$$p_h(x_m, t_n) = P\{X_{t_n} = x_m\} = b(d, n, 1/2) = \binom{n}{d}\left(\frac{1}{2}\right)^d \left(\frac{1}{2}\right)^{n-d} = \frac{1}{2^n}\binom{n}{d}$$

si $x_m = x_0 + [2d - n]h$ con $d \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

Paseos al azar unidimensionales (4)

También podríamos obtener una ecuación en diferencias para u_h notando que si nuestra partícula está en la posición x_n en un tiempo t_n, en el tiempo t_{n-1} debe haber estado en las posiciones x_{m-1} o x_{m+1} con probabilidad $1/2$, dependiendo del valor de la variable aletoria de Rademacher U_n

Entonces si $x \in G$:

$$\begin{aligned} p_h(x_m, t_n) &= P\{X_{t_n} = x_m\} \\ &= P\{X_{t_n} = x_m / U_n = 1\} \cdot P\{U_n = 1\} \\ &+ P\{X_{t_n} = x_m / U_n = -1\} \cdot P\{U_n = -1\} \\ &= P\{X_{t_{n-1}} = x_{m-1}\} \cdot \frac{1}{2} + P\{X_{t_{n-1}} = x_{m+1}\} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(p_h(x_{m-1}, t_{n-1}) + p_h(x_{m+1}, t_{n-1}) \right) \end{aligned}$$

Recordamos el desarrollo de Taylor

Si $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función C^2,

$$p(x, t + k) - p(x, t) = \frac{\partial p}{\partial t}(x, t)k + o(k)$$

$$p(x + h, t) + p(x - h, t) - 2p(x, t) = \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x}(x, t)h^2 + o(h^2)$$

La ecuación del calor o ecuación de difusión (1)

Nos interesa entender el comportamiento asintótico de $p_h(x, x_0, t)$ cuando $h \to 0$.
Esto va a depender de que relación exista entre el paso en el espacio h y el paso en el tiempo k.
Vamos a asumir que $k = c \cdot h^2$ donde c es una constante, entonces:

$$\frac{p_h(x_m, t_n) - p_h(x, t_{n-1})}{k} = \frac{1}{2} \frac{p_h(x_m, t_{n-1}) + p_h(x_m, t_{n-1}) - 2p_h(x_m, t_{n-1})}{ch^2}$$

Si suponemos que las densidades de probabilidad convergen

$$\frac{p_h(x, t)}{h} \to p(x, t)$$

obtenemos en el límite la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial p}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2c} \, \frac{\partial^2 p}{\partial^2 x}(x, t)$$

que se conoce como ecuación del calor o ecuación de difusión.

La ecuación del calor o ecuación de difusión (2)

Para cada $t > 0$, la función $p(x,t)$ va a ser una densidad de probablidad, límite de las probabilidades $p_h(x_m, t_n)$ que dan la distribución discreta. Vab a depedender también del punto x_0 donde arranca nuestra partícula, así que las notaremos $p_h(x_m, x_0, t_n)$ y $p(x, x_0, t)$ para enfatizar esto.

Entonces si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada:

$$u_h(x_0, t_n) = E[f(X_{t_n})/X_0 = x_0] = \sum_{x_m} f(x_m) \cdot p_h(x_m, x_0, t_n)$$

$$\to u(x_0, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x, x_0, t)\, dx$$

y u también va a satisfacer la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2c}\ \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x,t)$$

con la condición inicial

$$u(x_0, 0) = f(x_0)$$

Nota: Esto no es una justificación rigurosa, pero nos da una idea intuitiva de lo que esperamos que ocurra.

Teorema local de De Moivre-Laplace

Para encontrar explícitamente quien es p usamos el siguiente teorema que vimos en la clase 7,

Teorema (Teorema local de De Moivre-Laplace)

$$b(d, n, p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-z_d^2/2}\,(1 + \beta_{n,k})$$

donde

$$z_d = \frac{d - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p$$

y para $M \geq 0$,

$$\max_{|z_d| \leq M} |\beta_{n,d}| \to 0 \text{ cuando } n \to \infty \tag{1}$$

Aplicación del teorema

Nos acordamos de que

$$p_h(x_m, t_n) = P\{X_{t_n} = x_m\} = b(d, n, 1/2)$$

si $x_m = x_0 + [2d - n]h$ con $d \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Entonces

$$z_d = \frac{d - np}{\sqrt{npq}} = \frac{d - n/2}{\sqrt{n/4}} = \frac{2d - n}{\sqrt{n}} = \frac{\frac{x_m - x_0}{h}}{\sqrt{n}} = \frac{x_m - x_0}{\sqrt{n}h}$$

Luego como $t_n = kn = ch^2 n$:

$$z_d^2 = \frac{(x_m - x_0)^2}{h^2 n} = \frac{c(x_m - x_0)^2}{t_n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n/4}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t_n/(2k)}} = \frac{ch}{\sqrt{\pi t_n/2}}$$

Aplicación del teorema (2)

Luego cuando $h \to 0$, obtenemos que:

$$\frac{p_h(x_m, t_n)}{h} \to p(x, x_0, t) := \frac{c}{\sqrt{\pi t_n}} \exp\left(\frac{-c(x - x_0)^2}{t_n/2}\right)$$

Entonces recapitulando, la solución general de la ecuación del calor con la condición inicial

$$u(x_0, 0) = f(x_0)$$

vendrá dada por:

$$u(x_0, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x, x_0, t)\, dx$$