Funciones características

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Exponencial compleja

Definición

Para $x \in \mathbb{R}$, definimos la exponencial de expoente imaginario por medio de la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \ \operatorname{sen} \ x$$

Esta definición puede justificarse a partir de los desarrollos de Taylor.

Propiedad Fundamental

$$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Notamos también que

$$|e^{ix}| = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$(e^{ix})^{-1} = e^{-ix} = \cos x - i \ \operatorname{sen} \ x$$

$$e^{i(x+2\pi k)} = e^{ix} \ x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Variables aleatorias con valores complejos

También notemos que que podemos considerar variables aleatorias con valores complejos $X : \Omega \to \mathbb{C}$, en lugar de con valores reales como hemos hecho hasta ahora. Escribiendo $X = A + Bi$ donde $A = \mathrm{Re}(X)$ y $B = \mathrm{Im}(X)$ son la parte real e imaginaria de X, no ofrece ninguna dificultad extender la definición de esperanza para ellas, escribiendo

$$E(X) = E(A) + iE(B)$$

Las propiedades de la esperanza se generalizan fácilmente para estas variables.

Lema

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria con valores complejos tal que $E[|X|] < +\infty$, entonces $E[X]$ está bien definida y

$$|E[X]| \leq E[|X|] \tag{1}$$

Demostración

Como $|A| \leq |X|, |B| \leq |X|$ se deduce que

$$E[|A|] \leq E[|X|] < \infty, E[|B|] \leq E[|X|] < \infty$$

luego $E[X]$ está bien definida. Probemos la desigualdad (1). Si $E[X]) = 0$ no hay nada que probar. Sino, la escribimos en forma polar

$$E[X] = r \cdot e^{i\theta} \quad \text{con } \theta \in \mathbb{R}$$

donde

$$r = |E(X)| = e^{-i\theta} E[X] \in \mathbb{R}_{>0}$$

Entonces

$$r = |\text{Re}(E[e^{-i\theta} X])| = |E[\text{Re}(e^{-i\theta} X)]| \leq E[|\text{Re}(-e^{i\theta} X)|] \leq E[| - e^{i\theta} X|] = E[|X|]$$

usando que ya sabemos que (1) es válida para variables aleatorias reales, y que

$$|\text{Re}(z)| \leq |z| \text{ para todo } z \in \mathbb{C}$$

Integrales de funciones con valores complejos

Similarmente, si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ es una función continua, escribimos $f(t) = x(t) + iy(t)$ donde $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$. Y definimos

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt + i \int_a^b y(t)\, dt$$

De nuevo tenemos

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

Esta desigualdad la podemos pensar como

$$|E[f(U)| \leq E(|f(U)|) \text{ donde } U \sim \mathcal{U}(a, b)$$

También podemos definir

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} x(t) + i \frac{d}{dt} y(t)$$

si a y b son derivables.

Una desigualdad que nos va a ser útil

Lema

$$|e^{ix} - 1| \leq |x| \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostración.

$$e^{ix} - 1 = \int_0^x i \; e^{it} \; dt$$

Luego si $x \geq 0$,

$$|e^{ix} - 1| \leq \int_0^x \left| ie^{it} \right| \; dt = \int_0^x 1 \; dt = x = |x|$$

Si $x < 0$,

$$\int_0^x ie^{it} \; dt = -\int_x^0 ie^{it} \; dt$$

y obtenemos de la misma forma

$$|e^{ix} - 1| \leq -x = |x|$$

Definición de la función característica de una variable aleatoria

Definición

Si X es una variable aleatoria tal que $E(|X|)$ es finita, su función característica se define por

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] \quad t \in \mathbb{R}$$

Teniendo en cuenta la definición de la esperanza, esto puede escribirse como

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, dF_X(x)$$

siendo F_X la función de distribución de X.

Por lo anterior, φ_X siempre está bien definida, y

$$|\varphi_X(t)| \leq 1$$

Además notamos que $\varphi_X(0) = 1$. A veces escribiremos φ_F en lugar de φ_X, pues la función característica sólo depende de la distribución de F.

Funciones características de variables aleatorias discretas

Si X es una variable aleatoria discreta que toma valores en $\mathbb{N}_0$ y consideramos su distribución puntual

$$p_k = P\{X = k\}$$

tenemos que

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot p_k = \sum_{k=0} (e^{it})^k \cdot p_k = g_X(e^{it})$$

donde

$$g_X(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k$$

es la función generatriz que introdujimos en la clase 6.

Funciones características de variables aleatorias discretas (2)

Por ejemplo, usando esto deducimos que:

- Si $X \sim \text{Bi}(n,p) \Rightarrow \varphi_X(t) = (p + qe^{it})^n = \left(1 + p(e^{it} - 1)\right)^n$ donde $q = 1 - p$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow \varphi_X(t) = e^{\lambda(\exp(it)-1)}$.
- Si $X \sim Ge(p) \Rightarrow \varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-qe^{it}}$ donde $q = 1 - p$.

Más generalmente, si consideramos variables aleatorias discretas con valores en $\mathbb{Z}$ obtendríamos expresiones de la forma

$$\varphi_X(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{itk} \cdot p_k$$

que se llaman series de Fourier. Notemos que en estos casos φ_X resulta periódica de período 1,

$$\varphi_X(t+1) = \varphi_X(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Fourier mostró que muchas funciones periódicas pueden representarse mediante series de este tipo, mediante una adecuada elección de los coeficientes (p_k).

Funciones características de variables aleatorias continuas

Si X es una variable aleatoria absolutamente continua con densidad de probabilidad $f(x)$, entonces

$$\varphi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}\,dx$$

La función

$$\widehat{f}(t) = \mathcal{F}(f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}\,dx$$

se llama transformada de Fourier de la función f. Está definida para cualquier $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty \quad \textbf{Notación: } f \in L^1(\mathbb{R})$$

Para ser precisos, acá tendríamos que usar la integral de Lebesgue que se ve en los cursos de análisis real. Pero en esta materia, lo usaremos simplemente como una notación (pueden pensar la integral como una integral impropia).

Un ejemplo

Si $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, entonces

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \mathcal{F}(I_{[a,b]})(t) = \int_a^b e^{itx} \, \frac{dx}{b-a} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

En particular cuando $X \sim \mathcal{U}(-1,1)$

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{it} - e^{\cdot it}}{2it} = \frac{\sin t}{t}$$

Notemos que $\varphi_X \notin L^1(\mathbb{R})$ pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| \, dt = +\infty$$

Algunas observaciones

- Existe toda una rama de la matemática dedicada al estudio de las series de Fourier y la transforma de Fourier, el análisis armónico.
- Para nosotros, será una herramienta útil para estudiar la convergencia en distribución de las variables aleatorias, y nos permitirá probar uno de los resultados centrales de la teoría de probabilidades: el teorema del límite central.
- Pero las series y transformadas de Fourier tiene innumerables aplicaciones en muchas ramas de la matemática y la física: ecuaciones diferenciales, análisis de señales, ondas, procesamiento de imágenes, mecánica cuántica, teoría de números, etc.
- De hecho, Joseph Fourier introdujo sus series para estudiar la propagación del calor en una barra de metal, que describió por medio de una ecuación diferencial (eso lo van a ver en el curso de ecuaciones diferenciales).
- Por eso es una herramienta que vale la pena aprender, más allá de la aplicación inmediata en la que estamos interesados (a la teoría de probabilidades).

Relación con la función generatriz de momentos

En la clase 14 introdujimos una definción parecida

Definición

Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, su *función generadora de momentos* *o* *función generatriz de momentos* *de define por*

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

(siempre que esta esperanza sea finita).

Si aceptamos que t pueda tomar valores complejos, formalmente tenemos

$$\varphi_X(t) = M_X(it)$$

pero notenmos que $\varphi_X(t)$ está bien definida para todo t real si $E[|X|] < +\infty$ mientras que $M_X(t)$ podría no existir para todo $t \in \mathbb{R}$.

Algunos ejemplos: las distribuciones exponencial y gama

- En la clase 14, vimos que si $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ si $t < \lambda$. Más generalmente, podríamos considerar valores complejos de t con $\text{Re}(t) < \lambda$. En particular, mirando valores imaginarios de t tenemos que:

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

- Más generalmente, vimos en dicha clase que si $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ y $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$M_X(t) = \left(\frac{t}{\lambda - t}\right)^{\alpha} \quad \text{siempre que } t < \lambda$$

  Nuevamente, podemos tomar t complejo con $\text{Re}(t) < \lambda$, y deducir que

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{\alpha}$$

Puede hacer falta algunos conocimientos de análisis complejo, para darle sentido y demostrar rigurosamente estas fórmulas.

Efecto de una traslación

Proposición

Si $E[|X|] < \infty$ *donde* $b \in \mathbb{R}$, *y* $Y = X + b$ *entonces*

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(t)$$

Demostración.

$$\varphi_Y(t) = E(e^{itY}) = E(e^{it(X+b)}] = E[e^{itX} \cdot e^{itb}] = e^{itb}\varphi_X(t)$$

□

Formulación en términos de la transformada de Fourier

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $h(x) = g(x - b)$,

$$\widehat{h}(t) = e^{itb} \cdot \widehat{g}(t)$$

Efecto de una dilatación o cambio de escala

Proposición

Si $E[|X|] < \infty$ *y* $Y = aX$ *con* $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$\varphi_Y(t) = \varphi_X(ta)$$

Demostración.

$$\varphi_X(t) = E[e^{itY}] = E(e^{it(aX)}] = E[e^{i(ta)X}] = \varphi_X(ta)$$

□

Formulación en términos de la transformada de Fourier

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $h(x) = \frac{1}{a} g(xa)$,

$$\widehat{h}(t) = \widehat{g}(ta)$$

Efecto de una modulación

De esta propiedad no encontré una formulación probabilítica

Si $g \in L^1(\mathbb{R})$ y $h(x) = e^{ixc} \cdot g(x)$ con $c \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{h}(t) = \widehat{g}(t + c)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \widehat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{ixt}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixc} \cdot g(x)\, e^{ixt}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{ix(t+c)}\, dx \\ &= \widehat{g}(t + c) \end{aligned}$$

□

Continuidad uniforme de las funciones características

Proposición

La función característica de una variable aleatoria X con $E(|X|) < \infty$ es uniformemente continua

Demostración.

$$\begin{aligned}
|\varphi_X(t+h) - \varphi_X(t)| &= |E[e^{i(t+h)X}] - E[e^{itX}]| && = |E[e^{i(t+h)X} - e^{itX}]| \\
&= |E[e^{itX} \cdot e^{ihX} - e^{itX})| && = |E[e^{itX} \cdot (e^{ihX} - 1)| \\
&\leq E[|e^{itX}| \cdot |e^{ihX} - 1|] && = E[|e^{ihX} - 1|] \\
&\leq E[|hX|) \\
&= |h| E(|X|) < \varepsilon
\end{aligned}$$

si

$$|h| < \delta = \frac{\varepsilon}{E|X|}$$

(si $E[|X|] = 0$, $X = 0$ con probabilidad 1 y $\varphi_X \equiv 1$].

Funciones características e independencia

Proposición

Si X e Y son variables aleatorias independientes con esperanza finita entonces

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t)$$

Demostración.

Como X e Y son independientes, e^{itX} y e^{itY} también lo son entonces

$$\varphi_{X+Y}(t) = E[e^{it(X+Y)}] = E[e^{itX}]E[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$$

$\square$

formulación en el lenguaje de la transformada

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ y

$$\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \cdot \widehat{g}(t)$$

Funciones caracterísiticas y momentos

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}$.Si $E(|X|^k) < \infty$, entonces $\varphi_X(t)$ es de clase C^k y

$$\varphi_X^{(k)}(t) = E((iX)^k e^{itX})$$

En particular

$$\varphi_X^{(k)}(t) = i^k m_k(X)$$

donde

$$\mu_k(X) = E(X^k)$$

es el k-ésimo momento de la variable X (respecto del origen).

Demostración.

Se obtiene derivando bajo el signo de esperanza. Para justificar esto, se requiere un teorema de derivación de integrales con respecto a un parámetro, que se ve en análisis real. $\square$

Función Característica de la Distribución Normal

El siguiente teorema es clave para la prueba que haremos del teorema central del límite, uno de los resultados fundamentales de la teoría de probabilidades:

Teorema

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, *entonces* $\varphi_X(t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2}$

Un enenunciado equivalente en el lenguaje analítico sería:

Teorema

Si $g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$ *con* $\sigma > 0$, *entonces*

$$\widehat{g}(t) = e^{it\mu} e^{-(\sigma t)^2/2}$$

Existen varias pruebas de este teorema. Presentaré una prueba que aprendí en el curso de V. Yohai que utiliza argumentos probabilísticos. Hay también demostraciones que utilizan argumentos de análisis complejo o de ecuaciones diferenciales.

Una caracterización de la función exponencial

La idea de dicha prueba es usar las propiedades de invariancia de la distribución normal para obtener una ecuación funcional para la función característica buscada. Necesitaremos el siguiente lema, que ya usamos en la clase 11:

Lema

Sea $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *una función continua que satisface que:*

$$G(t+s) = G(t)G(s)$$

Entonces: $G(t) = G(0)a^t$, *siendo* $a = G(1)$.

Demostración

Usando resultado sobre cambio de variables lineales, vemos que basta probarlo para la variable normalizada

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Consideramos entonces dos variables aleatorias $X, Y \sim N(0,1)$ independientes, y sea $Z = aX + bY$, con $a, b > 0$. Tendremos entonces

$$\varphi_Z(t) = \varphi_{aX}(t)\varphi_{bY}(t) = \varphi_X(ta) \cdot \varphi_Y(tb)$$

y como la función característica sólo depende de la distribución esto es igual a

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X(at)\varphi_X(tb)$$

Demostración (2)

Por otra parte, sabemos que como X e Y son variables normales independientes,

$$Z \sim N(0, a^2 + b^2)$$

Entonces

$$Z^* = \frac{Z}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sim N(0, 1)$$

y se deduce que

$$\varphi_Z(t) = \varphi_X\left(\sqrt{a^2 + b^2}\ t\right)$$

Comparando las dos expresiones para $\varphi_Z(t)$ obtenemos la ecuación funcional:

$$\varphi_X\left(\sqrt{a^2 + b^2}\ t\right) = \varphi_X(at)\varphi_X(tb)$$

En particular eligiendo $t = 1$, tenemos que

$$\varphi_X\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) = \varphi_X(a)\varphi_X(b)$$

Demostración (3)

Llamemos $\psi(s) = \varphi_X(\sqrt{s})$ para $s \geq 0$. Entonces

$$\psi(a^2 + b^2) = \psi(a^2)\psi(b^2)$$

y poniendo $\alpha = a^2, \beta = b^2$ deducimos que

$$\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha)\psi(\beta) \quad \text{para todo } \alpha, \beta \geq 0$$

(Si α o β son cero, esto vale pues $\varphi_X(0) = 1$). Entonces usando la continuidad de ψ, deducimos que

$$\psi(t) = e^{tb} \quad \text{para algún } b \in \mathbb{R}$$

ya que $\psi(0) = 1$, y por lo tanto

$$\varphi_X(t) = e^{bt^2}$$

Demostración (4)

Para encontrar el valor de b, derivamos dos veces

$$\varphi'_X(t) = 2bt\ e^{bt^2}$$

$$\varphi''_X(t) = (2b + 2bt)\ e^{bt^2}$$

En particular,

$$\varphi''_X(0) = 2b = -\mu_2(X)$$

por la relación entre la función característica y los momentos. Pero

$$\mu_2(X) = Var(X) = 1$$

luego $b = -1/2$, y obtenemos que

$$\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}.$$

La identidad de Plancherel

Lema (Identidad de Plancherel)

Sea X una variable aleatoria con $E(|X|) < +\infty$, función de distribución F_X y función característica φ_X. Entonces si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función en $L^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)\, dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\, g(y)\, dy$$

donde $\widehat{g} = \mathcal{F}(g)$ es la transformada de Fourier de g.

Demostración

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(x)\, dF_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy}\, dy \right] \, dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{ixy}\, dF_X(x) \right] \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\, dF_X(x) \right] g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\, g(y)\, dy\end{aligned}$$

El cambio en el orden de integración se puede justificar pues

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(y) e^{ixy}|\, dF_X(x)\, dy &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy < \infty\end{aligned}$$

Un lema sobre la convolución

Lema

Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones de distribución F_X y F_Y. Entonces $Z = X + Y$ tiene la función de distribución

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-x)\, dF_Y(x)$$

Este lema generaliza el resultado que vimos en la clase 11

Proposición

Supongamos que X e Y son variables aleatorias continuas independientes, que se distribuyen en $\mathbb{R}$ según las densidades $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, entonces $X + Y$ se distribuye según la densidad $f * g$.

Demostración

Aproximamos X por una variable aleatoria discreta X_π. Suponemos primero que X está concentrada en un intervalo $(a,b]$ y y consideramos una partición $\pi : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $(a,b]$ con puntos marcados $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k]$. Definimos

$$X_\pi = \xi_k \text{ si } X \in (x_k, x_{k+1}]$$

Sea $Z_\pi = X_\pi + Y$.

$$\begin{aligned} F_{Z_\pi}(z) &= P\{Z_\pi \leq z\} = P\{X_\pi + Y \leq z\} \\ &= \sum_k P\{X_\pi + Y \leq z / X_\pi = \xi_k\} \cdot P\{X_\pi = \xi_k\} \\ &= \sum_k P\{Y \leq z - \xi_k\} \cdot P\{X_\pi = \xi_k\} \\ &= \sum_k F_Y(z-\xi_k) \cdot P\{x_k < X \leq x_{k+1}\} \\ &= \sum_k F_Y(z-\xi_k) \cdot [F_X(x_{k+1}) - F_X(x_k)] \end{aligned}$$

Esta es una suma de Riemann-Stieltjes y en el límite se obtiene el enunciado.

Un lema sobre la convolución (2)

Derivando obtenemos:

Corolario

Sean X e Y variables aleatorias independientes. Si X es una variable continua con densidad f_X y Y es una variable aleatoria cualquiera con función distribución F_Y entonces $Z = X + Y$ es una variable continua con densidad

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - x)\, dF_Y(x)$$

Fórmula de inversión

Teorema (Fórmula de inversión)

Sea X una variable aleatoria con $E(|X|) < +\infty$, función de distribución F_X y función característica φ_X. Entonces

$$F_X(x_0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\sigma \to 0} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\, e^{-iz\cdot y} \cdot e^{-(\sigma y)^2/2}\, dy \right] dz$$

en cada punto de continuidad x_0 de F_X.

Corolario (Teorema de unicidad)

Si X e Y son variables aleatorias con esperanza finita, entonces si

$$\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow F_X(x) = F_Y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostración

Usamos la identidad de Plancherel con la elección

$$g(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-iz\cdot y} \cdot e^{-(\sigma_n y)^2/2}$$

donde (σ_n) es una sucesión tal que $\sigma_n \to 0$ y $z \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\widehat{g}(x) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \; e^{-(x-z)^2/(2\sigma_n^2)}$$

usando las propieddes que vimos antes (¡chequen esto!). Queda:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \; e^{-(x-z)^2/(2\sigma^2)} \; dF_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y) \; e^{-iz\cdot y} \cdot e^{-(\sigma_n y)^2/2} \; dy$$

Por el lema, la primera integral es la densidad de probabilidad de $X_n = X + Y_n$ donde $Y_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ es independiente de X.

Demostración (2)

Integrando

$$F_{X_n}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\, e^{-ix_0 \cdot y} \cdot e^{-(\sigma_n y)^2/2}\, dy \right] dz$$

Pero nos acordamos que $X_n = X + Y_n$ donde $Y_n \sim N(0, \sigma_n^2)$ es independiente de X.

Cuando $\sigma_n \to 0$, $Y_n \xrightarrow{P} 0$, luego $X_n \xrightarrow{P} X$,y por lo tanto $X_n \xrightarrow{D} X$. Entonces

$$F_{X_n}(t) \to F_X(t)$$

en cada punto de continuidad de F_X. Esto prueba el teorema.

Un teorema de análisis real

Teorema (de convergencia mayorada de Lebesgue)

Sea (f_n) *una sucesión de funciones en* $L^1(\mathbb{R}^n)$*. Si existe una función* g *en* $L^1(\mathbb{R})$ *tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}$$

y

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

En este teorema, "para casi todo x´´ quiere decir "salvo quizás para los x en un conjunto cuya medida de Lebesgue es cero´´. En este teorema en realidad es muy importante en realidad usar la integral de Lebesgue, porque el límite puntual de funciones integrables en el sentido de Riemann podría no serlo.

Otra forma de la fórmula de inversión

En general, $\varphi_X \notin L^1(\mathbb{R})$, como muestra el ejemplo de la distribución uniforme [o también si X fuera una variable discreta no nula]. Pero si esto ocurriera, podríamos pasar al límite cuando $\sigma \to 0$ en la integral (usando el teorema de convergencia mayorada, y obtener una fórmula más sencilla

$$F_X(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\ e^{-ix_0 \cdot y}\ dy$$

[Si φ_X no estuviera en L^1, esto no tendría sentido pues la integral podría diverger como se ve tomando $x_0 = 0$]
Se deduce que entonces, X es una variable continua con la densidad:

$$f_X(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(y)\ e^{-ix_0 \cdot y}\ dy$$

Otra forma de la fórmula de inversión (2)

En términos de la transformada de Fourier, esto se formularía así:

Teorema (Fórmula clásica de inversión de Fourier)

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ continua tal que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, entonces podemos reconstruir f a partir de su transformada mediante la fórmula de inversión

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{-ix\cdot y}\, dy$$

Comparemos esto con la definición de la transformada:

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{ix\cdot y}\, dx$$

Esta forma de la fórmula de inversión de Fourier es más simétrica, pero no es cierta sin la restricción de que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.