Convergencia casi segura y la ley fuerte de los grandes números

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Repasamos las definicones de convergencia

Convergencia en probabilidad

En la teoría de probabilidades se utilizan frecuentemente diferentes nociones de convergencia de una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias. Voy a empezar poniendo todas las definiciones para que puedan hacer las prácticas. Después las iremos analizando de a una.

La primera noción que vamos a estudiar es la de convergencia en probabilidad, que aparece en el teorema de Bernoulli (ley débil de los grandes números).

Definición

Sea $(X_n)_{n\in N} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de variables aleatorias, definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ y finitas con probabilidad 1. Se dice que (X_n) converge en probabilidad a la variable X si para todo $\delta > 0$, tenemos que

$$P\{|X - X_n| > \delta\} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Notación:

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Convergencia casi segura

Otra noción que vamos a estudiar es la de convergencia casi segura.

Definición

Sea $(X_n)_{n\in N} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de variables aleatorias, definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ y finitas con probabilidad 1. Se dice que (X_n) convergen en forma casi segura (o casi con seguridad) a la variable X si

$$X_n \to X \text{ con probabilidad } 1$$

o sea

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)\}) = 1$$

o lo que es equivalente

$$P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\}) = 0$$

Notación:

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X$$

Nota: En análisis real, esta noción se denomina convergencia en casi todo punto.

Repasamos: desigualdades fundamentales

- Desigualdad de Markov básica: Si X es una variable aleatoria no negativa,

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} E(X)$$

- Desigualdad de Markov con momentos de orden p: Si X es una variable aleatoria y $p > 0$ entonces

$$P\{|X| \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^p} E(|X|^p)$$

- Desigualdad de Tchebyschev clásica: Si X es una variable aleatoria con segundo momento finito,

$$P\{|X - E(X)| \geq \lambda\} \leq \frac{\mathrm{Var(X)}}{\lambda^2}$$

- Desigualdad de Jensen: Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces:

$$g(E[X]) \leq E[g(X)])$$

En particular:

$$E(|X|^p)^{1/p} \leq E(|X|^q)^{1/q} \quad \text{si } p \leq q$$

Parte II

Relaciones entre las nociones de convergencia en probabilidad y casi segura

La convergencia casi segura implica la convergencia en probabilidad

Proposición

Si $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, *entonces* $X_n \xrightarrow{P} X$.

Nota: En general, la afirmación recíproca no es cierta como vamos a ver. La convergencia en probabilidad no implica la convergencia casi segura.

Demostración

Notamos que:

$$X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow \forall k \geq 1 \; \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leq \frac{1}{k}$$

$$X_n(\omega) \not\longrightarrow X(\omega) \Leftrightarrow \exists k \geq 1 \; \forall n_0 \exists n \geq n_0 : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}$$

$$\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\longrightarrow X(\omega)\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_0} \left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}$$

Como $X_n \xrightarrow{c.s.} X$, este conjunto tiene probabilidad 0. En consecuencia, también tienen probabilidad cero los eventos (más perqueños)

$$A_k = \bigcap_{n_0=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq n_0} \left\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}$$

Demostración (2)

Como los eventos:

$$B_{k,n_0} = \bigcup_{n \geq n_0} \left\{ \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k} \right\}$$

son decrecientes, deducimos (por la continuidad de la probabilidad) que:

$$A_k = \bigcap_{n_0=1}^{\infty} B_{k,no} \wedge P(A_k) = 0 \Rightarrow \lim_{n_0 \to +\infty} P(B_{k,n_0}) = 0$$

Vale decir que si elegimos n_0 suficientemente grande, $P(B_{k,n_0}) < \delta$ En consecuencia

$$P \left\{ \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{k} \right\} < \delta$$

para todo $n \geq n_0$. Deducimos que X_n tiende en probabilidad a X.

Ejemplo para ver que convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura (1)

Cuando trabajamos con la noción de convergencia casi-segura va a importar cuál es el espacio muestral $(\Omega, \mathcal{E}, P)$.

En este ejemplo, vamos a considerar, el espacio muestral correspondiente al experimento de elegir un número real con distribución uniforme en $[0, 1]$ que discutimos en la clase 2:

- $\Omega = [0, 1]$
- $P(E) = m(E)$. Comentamos que es una medida σ-aditiva que extiende la medida elemental de uniones finitas intervalos.
- $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}([0, 1])$ será la σ-álgebra de Borel de $[0, 1]$, generada por los sub-intervalos de $[0, 1]$.

Recordamos que una forma de pensarlo es que elegimos los dígitos binarios de un número real en $[0, 1]$ tirando infinitas veces una moneda equilibrada (ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito $1/2$).

Ejemplo para ver que convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura (2)

Para $n \in \mathbb{N}$, definimos los intervalos

$$J_n = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$$

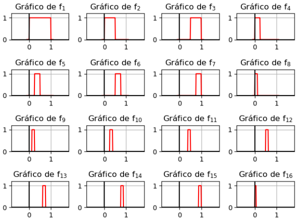
donde $k = k(n) = [\log_2(n)]$ y $j = j(n)$ cumple que $n = 2^k + j$ con $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^{j-1}\}$.

Definimos $X_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como la función indicadora del intervalo J_n.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in J_n \\ 0 & \text{si } \omega \notin J_n \end{cases}$$

¡Cuando usamos el espacio muestral $\Omega = [0,1]$ las funciones reales se vuelven variables aleatorias!

Ejemplo para ver que convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura (3)



Ejemplo para ver que convergencia en probabilidad no implica convergencia casi segura (4)

En este ejemplo, observamos que dado $0 < \delta < 1$,

$$P\{|X_n| > \delta\} = \frac{1}{2^k} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Entonces

$$X_n \xrightarrow{P} 0$$

Pero dado cualquier $\omega \in [0, 1]$, hay infinitos n tales que $\omega \in J_n$, o sea $X_n(\omega) = 1$. Por lo que X_n no converge en forma casi segura a cero.

Parte III

El lema de Borel-Cantelli

El lema de Borel-Cantelli (parte I)

Lema (de Borel-Cantelli - Parte I)

Consideramos una sucesión $(A_n)_{n \in N}$ de eventos, y consideramos el el evento "ocurren infinitos A_n", es decir:

$$A_\infty = \bigcap_{k \in N} \bigcup_{n \geq k} A_n$$

Si se verifica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty \tag{1}$$

entonces, con probabilidad 1 *ocurre un número finito de tales sucesos. Es decir*

$$P(A_\infty) = 0$$

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$, teniendo en cuenta la hipótesis (1), podemos elegir k tal que

$$\sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) < \varepsilon$$

Entonces, por la σ-subaditividad de la probabilidad:

$$P\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) < \varepsilon$$

y como la probabilidad es creciente:

$$P(A_\infty) \leq P\left(\bigcup_{n\geq k} A_n\right) < \varepsilon$$

Como, ε es arbitrario, deducimos que:

$$P(A_\infty) = 0$$

El lema de Borel-Cantelli (parte II)

Lema (de Borel-Cantelli - Parte II)

Consideramos como antes una sucesión $(A_n)_{n\in N}$ *de eventos, y el el evento "ocurren infinitos* A_n*", es decir:*

$$A_\infty = \bigcap_{k\in N} \bigcup_{n\geq k} A_n$$

Si ahora suponemos que los A_n *son eventos independientes, y*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \qquad (2)$$

entonces, con probabilidad 1 *ocurren infinitos* A_n*. Es decir,*

$$P(A_\infty) = 1$$

Demostración

Miremos el complemento de A_∞, que es según las leyes de De Morgan:

$$A_\infty^c = \bigcup_{k \in N} \bigcap_{n \geq k} A_n^c$$

Entonces, tenemos que:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\ell} A_n^c \right) = \prod_{n=k}^{\ell} P(A_n^c) = \prod_{n=k}^{\ell} [1 - P(A_n)]$$

ya que como los eventos (A_n) son independientes, también lo son sus complementos. Ahora utilizando la desigualdad elemental

$$1 - x \leq e^{-x} \quad x \in [0, 1],$$

tenemos que:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\ell} A_n^c \right) \leq \prod_{n=k}^{\ell} e^{-P(A_n)} = \exp\left(-\sum_{n=k}^{\ell} P(A_n) \right)$$

Demostración (2)

En consecuencia, utilizando que la probabilidad es creciente, y la hipótesis (2), deducimos que:

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\right) = 0$$

(ya que el segundo miembro de la desigualdad anterior tiende a cero cuando $\ell \to \infty$). Entonces, por la σ-subaditividad de la probabilidad,

$$P(A_\infty^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcup_{k \in N} \bigcap_{n \geq k} A_n^c\right) = 0$$

deducimos que

$$P(A_\infty) = 1$$

Un ejemplo para el lema de Borel-Canteli

Ejercicio

Un mono teclea al azar en una computadora. Supongamos que cada tecla tiene una probabilidad positiva (no necaraiamente todas la misma) de ser pulsada y que las distintas pulsaciones del mono son independientes. Demostrar que con probabilidad 1, el mono eventualmente tecleará el cuento *El Aleph* de Borges (o cualquier otra obra que queramos), infinitas veces.

Solución (1)

El mono teclea letras de un alfabeto con N caracteres. Cada caracter tiene probabilidad $p_k > 0$ de ser pulsado cada vez que el mono pulsa una tecla, de modo que

$$\sum_{k=1}^{N} p_k = 1, \quad p_k > 0$$

Supongamos que El Aleph tiene L caracteres correspondientes a los índices $k_1, k_2, \ldots, k_L > 0$. Dada una secuencia de L caracteres, la probabilidad de que coincida con los caracteres de *El Aleph* será el producto

$$p = p_{k_1} p_{k_2} \ldots p_{k_L} > 0$$

de las correspondientes probabilidades, por la independencia de las pulsaciones.

En general, esta probabilidad será extremadamente pequeña. Pero esto vo va a afectar a nuestro argumento.

Solución (2)

Ahora dividamos las pulsaciones del mono en bloques de L caracteres, y sea A_n el evento: "el mono teclea el Aleph en el n-ésimo bloque'´. Notmaos que los A_n son eventos independientes y tienen todos probabilidad p. Como $p > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

diverge.

Entonces por el lema de Borel Cantelli (parte II), con probabilidad 1 ocurrirán infintos de los sucesos A_n, o sea el mono tecleará infinitas veces el Aleph.

Obviamente este ejemplo es una abstracción matemática: en la realidad no funciona, ¡porque la vida del mono no es infinita! ¡Y el lema de Borel-Cantelli no nos dice nada sobre cuánto tiempo tendremos que esperar hasta que el mono teclee por puro azar nuestra obra literaria favorita!.

Una aplicación del lema de Borel Cantelli

Proposición (Criterio para la convergencia casi segura)

Sea $(X_n) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una sucesión de variables aleatorias, y* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *otra variables aleatoria. Supongamos que para algún* $p > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} E[|X_n - X|^p] < +\infty$$

(o sea, esta serie converge). Entonces

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X$$

Demostración (1)

Usando la desigualdad de Markov tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} < +\infty$$

El lema de Borel Cantelli (parte I) implica que si llamamos $A_{n,\varepsilon}$ al evento

$$A_{n,\varepsilon} = \{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\}$$

entonces, con probabilidad 1 ocurren sólo finitos de los sucesos $A_{n,\varepsilon}$, es decir que el evento

$$A_{\infty,\varepsilon} = \bigcap_{k \in N} \bigcup_{n \geq k} A_{n,\varepsilon}$$

tiene probabilidad cero.

Demostración (2)

Tomando $\varepsilon = 1/m$, con $m \in \mathbb{N}$, y usando la σ sub-aditividad de la probabilidad, vemos que el evento:

$$\begin{aligned} B &= \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\to X(\omega)\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : \exists m \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N}\, \exists n \geq k : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \frac{1}{m}\right\} \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{\infty, 1/m} \end{aligned}$$

tiene probabilidad cero, ya que es la unión numerable de eventos de probabilidad cero. En consecuencia, $P(B^c) = 1$, es decir que

$$X_n \xrightarrow{c.s.} X.$$

Parte IV

La ley fuerte de los grandes números

La ley fuerte de los grandes números

Teorema

Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con $m_4 = E[X_n^4] < +\infty$. Sea $\mu = E[X_i]$ entonces

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n} \xrightarrow{c.s.} \mu$$

cuando $n \to +\infty$.

Nota: La hipótesis de que el cuarto momento m_4 es finito no es necesaria para la validez de este teorema, pero facilitará enormemente la demostración. Una demostración del teorema sin esta hipótesis (ley fuerte de Kolmogorov) se da en el apéndice de mis notas.

Idea de la demostración

La idea de la demostración va a ser usar el criterio para convergencia casi segura que vimos antes con $p = 4$. Podemos suponer que $\mu = 0$, cambiando sino X_n por $Y_n = X_n - \mu$, ya que

$$\overline{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \mu = \overline{X}_n - \mu$$

con lo que

$$\overline{X}_n \xrightarrow{c.s.} \mu \Leftrightarrow \overline{Y}_n \xrightarrow{c.s.} 0$$

Una desigualdad útil

Notamos $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Para estimar $E[S_n^4]$ vamos a usar el siguiente lema:

Lema (Un caso especial de la desigualdad de Khinchine)

Sean (X_k) una sucesión de variables aleatorias independientes con $E[X_k] = 0$ y cuarto momento acotado

$$E[|X_k|^4] \leq M \text{ donde } M \in \mathbb{R}$$

Entonces si los (a_j) son reales,

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^4\right] \leq 3M \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^2$$

Este lema lo vamos a usar hoy con $a_j = 1$, pero lo enuncio así porque nos puede ser útil en algún ejemplo más adelante.

Demostración del lema

Usando la linealidad de la esperanza, tenemos que

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^4\right] = \sum_{1\leq i_1,i_2,i_3,i_4\leq n} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}a_{i_4}E[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}]$$

Como las X_i son independientes, notamos que

$$E[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}] = 0$$

salvo en el caso en que los subíndices son todos iguales, o si son iguales por pares (utilizando que la esperanza del producto es el producto de las esperanzas cuando las variables son independientes, y que la esperanza de cada variable es cero).

Demostración del lema

Como $\binom{4}{2} = 6$, nos queda:

$$E\left[\left(\sum_{j=1}^{n} a_j X_j\right)^4\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^4 E[X_i^4] + 6 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_i^2 a_j^2 E[X_i^2 X_j^2]$$

Notamos que por la desigualdad de Jensen

$$E[X_i^2]^2 \leq E[(X_i^2)^2] = E[X_i^4] \leq M$$

Y por otra parte $i \neq j$, X_i^2 es independiente de X_j^2 en consecuencia:

$$E[X_i^2 X_j^2] = E[X_i^2] E[X_j^2] \leq M$$

Nos queda:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)^4\right] \leq M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^4 + 6 \sum_{i,j=1, i<j}^{n} a_i^2 a_j^2\right] \leq 3M\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^2$$

Demostración de la ley fuerte (con cuarto momento finito)

Usando el lema con $a_j = 1$ para todo j, podemos estimar el cuarto momento de S_n:

$$E\left[S_n^4\right] \leq 3m_4\, n^2$$

Deducimos que:

$$E\left[\left(\frac{S_n}{n}\right)^4\right] \leq \frac{C}{n^2}$$

Como la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2}$$

converge, el criterio para la convergencia casi segura que vimos antes (con $p = 4$), implica que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{c.s.} 0$$

Parte V

El teorema de los números normales de Borel

El teorema de los números normales de Borel (1)

En la clase 2, vimos el experimento de elegir un número real al azar en el intervalo $[0, 1]$ con distribución uniforme, a partir de elegir sus dígitos binarios al azar, mediante tiradas sucesivas de una moneda. Algo similar podríamos hacer considerarando desarrollos en una base de numeración b, con $b \geq 2$. Por ejemplo la base decimal ($b = 10$) o la hexadesimal ($b = 16$).

Pensamos en un experimento cuyos posibles resultados son los dígitos $0, 1, \ldots, b-1$ de la base b, que consideramos equiprobables y lo repetimos infinitas veces en condiciones independientes. El espacio muestral correspondiente a este experimento es

$$\Omega = D^{\mathbb{N}} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) : \forall n \in \mathbb{N}, \omega_n \in D\}$$

siendo $D = \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

El teorema de los números normales de Borel (1)

Podemos definir una función $\phi : \Omega \to [0, 1]$ por

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{b^i} = 0, \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \omega_n \ldots \text{ en base } b$$

$\phi(\omega)$ es el número real cuyo desarrolo en base b corresponde a la sucesión de dígitos ω.

Recíprocamente, cada número real $x \in [0, 1]$ admite un único desarrollo, salvo los de la forma $\frac{m}{b^k}$ con m, k enteros, que admiten dos desarrollos (pero forman un conjunto numerable, luego de medida de Lebesgue cero).

El teorema de los números normales de Borel (2)

Fijamos un dígito $d \in D$ y nos preguntamos por la frecuencia relativa de ese dígito en los primeros n lugares del número real $x = \phi(\omega)$

$$f_n = \frac{\#\{i : 1 \leq i \leq n, \omega_i = d\}}{n}$$

que podremos escribir como antes en la forma

$$f_n = \frac{S_n}{n}$$

si definimos las variables X_i por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_i = d \\ 0 & \text{si } \omega_i \neq d \end{cases}$$

¡Estamos realizando ensayos de Bernoulli con una probabilidad de éxito !

$$p = \frac{1}{b}$$

El teorema de los números normales de Borel (3)

Resulta que

$$P(\{\omega \in \Omega : \omega_1 = d_1, \omega_2 = d_2, \ldots, \omega_n = d_n\}) = b^{-n}$$

$$P(\{\omega \in \Omega : X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n\}) = p^k q^{n-k}$$

donde $k = S_n(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $p = 1/b$, $q = 1 - 1/b$.

Esto asigna probabilidades a ciertos subconjuntos del espacio muestral Ω. Esta forma de asignar las probabilidades se puede extender a una σ-álgebra definiendo

$$P(E) = m(\varphi(E))$$

donde m es la medida de Lebesgue, para todo conjunt $E \subset \Omega$ tal que $\phi(E)$ sea medible en el sentido de Lebesgue.

En particular las variables X_i son independientes.

El teorema de los números normales de Borel (4)

La ley fuerte de los grandes números dice entonces que

$$f_n \to \frac{1}{b} \tag{3}$$

con probabilidad 1, o lo que es equivalente f_n tiende a $1/b$ para casi todo $x \in [0,1]$ (o sea: salvo para los x en un conjunto de medida cero en el sentido de Lebesgue).

Los números que verifican la relación (3) para todo dígito $d \in D$ fueron denominador por Borel números (simplemente) normales en la base b. Se deduce de lo demostrado que casi todo número es simplemente normal en la base b.

El teorema de los números normales de Borel (4)

Más aún, Borel definió los números absolutamente normales como aquellos que son simplemente normales en cualquier base $b \geq 2$. Como la unión numerable de conjuntos de medida cero en el sentido de Lebesgue también tiene medida cero, se deduce el siguiente teorema:

Teorema

(E. Borel, 1909) Casi todo número real del intervalo $[0,1]$ *es absolutamente normal.*

Algunos comentarios sobre los números normales

- Aunque este teorema implica que existen números absolutamente normales, su prueba no es constructiva en el sentido que no nos provee ningún ejemplo de un número absolutamente normal. El primer ejemplo fue dado por Sierpinski en 1916.

- Tampoco se sabe si ciertos números que aparecen en la matemática son normales. Por ejemplo, se conjetura que π es absolutamente normal, pero no ha sido demostrado. (La noción de número absolutamente normal se puede extender a cualquier número real, simplemente ignorando su parte entera).

- Verónica Becher y Santiago Figueira del Departamento de Computación han trabajado bastante en el tema de números normales. En particular, pueden encontrar más información sobre este tema en la tesis de licenciatura de Santigo Figueira (dirigida por Verónica Becher), que se titula "Un ejemplo de un número computable absolutamente normal".

  http://dc.sigedep.exactas.uba.ar/media/academic/grade/thesis/tesisFigueira.pdf