Vectores Aleatorios

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Definición de la distribución normal multivariada

Definición

Decimos que el vector aleatorio n-dimensional X tiene distribución normal multivariada si se distribuye según una densidad de la forma:

$$f_X(x) = ce^{-q(x-\mu)}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}^n$ y $q(x) = \frac{1}{2}x^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot x$ es una forma cuadrática definida positiva (asociada a una matriz simétrica definida positiva $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$), y $c = c(\Sigma)$ es una constante elegida de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$$

es decir

$$c(\Sigma) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)}\, dx}$$

Notacion: $X \sim N(\mu, \Sigma)$.

Distribución normal multidimensional estándar

El caso más simple es cuando $\Sigma = I$ es la matriz identidad. En este caso

$$q(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

y podemos calcular la constante $c(I)$ porque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-q(x)} \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} e^{-x_i^2/2} \, dx \\ &= \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2/2} \, dx_i \right) \\ &= (2\pi)^{n/2} \end{aligned}$$

Luego

$$c(I) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$$

.

Traslación al origen

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$, entonces $\tilde{X} = X - \mu$ tendrá la densidad:

$$f_{\tilde{X}}(x) = c(\Sigma)e^{-q(x)}$$

Luego $\tilde{X} \sim N(\vec{0}, \Sigma)$ donde $\vec{0}$ es el origen en $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente si $\tilde{X} \sim N(\vec{0}, \Sigma)$, $X \sim N(\mu, \Sigma)$.

Por lo que podremos suponer en muchas cuentas que $\mu = 0$.

Cambios de variable lineales

Supongamos que $X \sim N(\vec{0}, \Sigma)$ y consideramos $Y = AX$ donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz no singular.
Entonces si llamamos $y = \varphi(x) = A \cdot x$, $\varphi^{-1}(y) = A^{-1} \cdot y$ tenemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(\varphi^{-1}(y))|\det(D\varphi^{-1})(y)| \\ &= c(\Sigma)\ \exp\left(-\frac{1}{2}[y^t \cdot \left(A^{-1}\right)^t] \cdot \Sigma^{-1} \cdot [A^{-1} \cdot y]\right) |\det(A^{-1})| \\ &= c(\Sigma)\ \exp\left(-\frac{1}{2}y^t \cdot \tilde{\Sigma}^{-1} y\right) |\det(A)|^{-1} \end{aligned}$$

donde $\tilde{\Sigma} = A \cdot \Sigma \cdot A^t$, de modo que $\tilde{\Sigma}^{-1} = (A^{-1})^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot A^{-1}$.
Deducimos que $Y \sim N(\vec{0}, \tilde{\Sigma})$ y que

$$c(\tilde{\Sigma}) = c(\Sigma) \cdot |\det(A)|^{-1}$$

Estándarización de la normal multivariada

En particular si $X \sim N(\vec{,}\Sigma)$, consideramos

$$X^* = \Sigma^{-1/2}(X - \mu) = \Sigma^{-1/2}\tilde{X}$$

Según lo que vimos antes

$$\tilde{X} \sim N(\vec{0}, \Sigma)$$

y entonces

$$X^* \sim N(\vec{0},)\tilde{\Sigma}$$

donde $\tilde{\Sigma} = A \cdot \Sigma \cdot A^t = I$ tomando $A = \Sigma^{-1/2}$.
Hemos probado

Lema

Si $X \sim N(\mu, \Sigma)$, entonces $X^* \sim N(\vec{0}, I)$.

La afirmación recíproca también es cierta, y se prueba con el mismo argumento.

¿Cómo se elige la constante $c(\Sigma)$?

Continuando con este argumento, vimos antes que

$$c(\tilde{\Sigma}) = c(\Sigma) \cdot |\det(A)|^{-1}$$

Pero habíamos elegido $A = \Sigma^{-1/2}$ y vimos antes que como $X \sim N(\vec{0}, I)$

$$c(\tilde{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$$

. Podemos despejar entonces que:

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} = c(\Sigma) \cdot \det(\Sigma)^{1/2}$$

[como Σ es definida positiva por hipótesis, $\det(\Sigma) > 0$.]

$$c(\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}}$$

Fórmula para la densidad normal multivariada

Por lo que en general, la fórmula de la densidad normal $N(\mu, \Sigma)$ nos queda:

Densidad normal multivariada $N(\mu, \Sigma)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^t \cdot \Sigma^{-1} \cdot (x-\mu) \right)$$

Distribuciones marginales

Ahora si $X \sim N(\vec{0}, \Sigma)$, ¿cuál es la distribución de cada componente X_i de X?. Notamos que

$$X^* = \Sigma^{-1/2}\tilde{X} \Rightarrow X = \Sigma^{1/2}X$$

Luego si llamamos $C = \Sigma^{1/2}$,

$$X_j = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot X_j^*$$

Como X^* tiene componentes $X_j^* \sim N(0,1)$ independientes,

$$c_{ij} \cdot X_i^* \sim N(0, c_{ij}^2)$$

usando lo que vimos la clase pasada sobre la suma de normales independientes,

$$X_j \sim N(0, \sigma_j^2)$$

donde

$$\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^2$$

serán las variancias de las X_i.

Distribuciones marginales (2)

Notemos que c_{ij} es la suma de los cuadrados de los elementos en la j-ésima fila de la matriz C que es simétrica. Luego:

$$\sigma_j^2 = \|Ce_j\|^2 = \langle Ce_j, Ce_j \rangle = \langle C^2 e_j, e_j \rangle = \langle \Sigma e_j, e_j \rangle = \Sigma_{j,j}$$

Luego vemos que los elementos de la diagonal de Σ son las varianzas de las variables X_j. Hemos probado

Teorema

Las distribuciones marginales de la normal multivariada son normales. Más precisamente, si $X \sim N(\mu, \Sigma)$, entonces

$$X_j \sim N(\mu_j, \Sigma_{j,j})$$

Normal Bivariada

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu}{\sigma_Y}\right.\right.\right.$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$