Vectores Aleatorios: Cambios de Variable

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Vectores aleatorios n-dimensionales

Vectores aleatorios n-dimensionales

Las ideas que vimos en la clase pasada se generalizan sin dificultad a vectores aleatorios multidimensionales, pero la notación resulta más complicada. Así pues si $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es un vector aleatorio n-dimensional, que se distribuye según una densidad conjunta $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que supongremos por simplicidad continua, tendremos que:

- La esperanza de una función $\varphi(X)$ del vector X, donde $\varphi : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, se puede calcular mediante la fórmula:

$$E[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x)\, dx$$

- La k-ésima componente X_k del vector X $(1 \leq k \leq n)$ se distribuye según la densidad marginal:

$$f_{X_k}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x, x_{k+1}, \dots, x_n)\, d\hat{x}_k$$

  donde

$$d\hat{x}_k = dx_1\; dx_2\; \dots\; dx_{k-1}\; dx_{k+1} \dots dx_n$$

Vectores aleatorios n-dimensionales (2)

- Las componentes X_1, X_2, $\dots X_n$ del vector X se dirán mutuamente independientes si para cualquier rectángulo n-dimensional (producto de intervalos)

$$I = \prod_{k=1}^{n} (a_k, b_n]$$

se verifica que:

$$P\{X \in I\} = \prod_{k=1}^{n} P\{a_k < X_k \leq b_k\}$$

En términos de la función de distribución conjunta, $X_1, X_2, \dots, X_n$ son mutuamente independientes si y sólo si $f(x)$ se factoriza en la forma:

$$f(x) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n)$$

Cambios de variables n-dimensionales

Proposición

Supongamos que X es una vector que se distribuye según una densidad $f(x)$ con soporte en $\overline{U}$ siendo U un abierto $\mathbb{R}^n$, y que $\varphi : U \to V$ es un difeomorfismo C^1, donde V es otro abierto de $\mathbb{R}^n$ entonces, si consideramos el vector aleatorio $Y = \varphi(X)$, Y se distribuye en V según la densidad

$$f(\varphi^{-1}(y))|det(D\varphi^{-1})(y)|$$

Demostración

Sea $W \subset V$ un abierto cualquiera, entonces

$$P\{Y \in W\} = P\{X \in \varphi^{-1}(W)\} = \int_{\varphi^{-1}(W)} f(x)dx$$

En esta integral, hagamos el cambio de variable $y = \varphi(x)$, $x = \varphi^{-1}(y)$. Entonces, según el teorema de cambio de variable

$$P\{Y \in W\} = \int_W f(\varphi^{-1}(y))|\det D(\varphi^{-1})(y)|dy$$

Como esto vale para todo $W \subset V$, concluimos que Y se distribuye en V según la densidad $f(\varphi^{-1}(y))|\det(D\varphi^{-1})(y))|$.

Parte II

Suma de variables aleatorias independientes

Suma de variables aleatorias independientes

Definición

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones integrables. Definimos su* **convolución** $f * g$ *de la siguiente manera:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, g(x - t)\, dt$$

Como ejemplo de la aplicación del teorema de cambio de variable, demostramos la siguiente afirmación:

Proposición

Supongamos que X *e* Y *son variables aleatorias continuas independientes, que se distribuyen en* $\mathbb{R}$ *según las densidades* $f(x)$ *y* $g(x)$ *respectivamente, entonces* $X + Y$ *se distribuye según la densidad* $f * g(x)$.

Demostración

Como X e Y son independientes,

$$(X, Y) \sim f(x)g(y)$$

Hacemos el cambio de variable lineal $(U, V) = \varphi(X, Y) = (X + Y, Y)$. Entonces $(X, Y) = \varphi^{-1}(U, V) = (U - V, V)$. Como φ es una transformación lineal, su diferencial coincide con ella misma. Para calcular el determinante de φ observamos que su matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, el determinante de φ es 1. Por el teorema anterior, tenemos que (U, V) que:

$$(U, V) \sim f(u - v)g(v) \text{ (densidad conjunta)}$$

Para recuperar la densidad de U (densidad marginal) debemos integrar en la variable v:

$$U \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(u - v)g(v)\, dv$$

Algunas Observaciones sobre la convolución

1. La convolución es conmutativa:

$$f * g = g * f$$

También es posible probar que es asociativa:

$$(f * g) * h = f * (g * h)$$

2. Si f y g son densidades de probabilidad, entonces $f * g$ también lo es.
3. Si f y g están soportadas en la semirrecta $[0, +\infty)$ (es decir: $f(t) = g(t) = 0$ si $t < 0$), entonces:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)\, g(x-t)\, dt$$

Suma de variables normales independientes

Proposición

Si $X \sim N(0, \sigma_1^2)$ *e* $Y \sim N(0, \sigma_2^2)$ *son variables aleatorias independientes, entonces* $X + Y \sim N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Demostracion (ver detalles en mi apunte)

Aplicamos la proposción anterior con

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma_1^2)}, \quad g(x) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/(2\sigma_2^2)}$$

Entonces $X \sim f * g$, donde

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/(2\sigma_1^2)} \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-t)^2/(2\sigma_2^2)}\, dt \\ &= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}A(x,t)\right\}\, dt\end{aligned}$$

donde

$$A(x,t) := \frac{t^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-t)^2}{\sigma_2^2}$$

Demostracion (2)

Reescribimos asta expresión, completando el cuadrado:

$$A(x,t) = \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t - x\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)^2 + \frac{1}{\sigma^2}x^2$$

donde $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. Sustituyendo y usando las propiedades de la exponencial nos queda

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(t - x\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}\right)^2\right\}\,dt$$

Demostracion (3)

Sólo nos falta pues calcular la integral,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} \left(t - x\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} \right)^2 \right\} \, dt$$

pero haciendo el cambio de variable

$$u = t - x\frac{\sigma_1^2}{\sigma^2}$$

vemos que no depende en realidad de x, y es

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{\sigma^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} u^2 \right\} \, du$$

Demostracion (5)

Y haciendo un último cambio de variable

$$v = \frac{\sigma}{\sigma_1 \sigma 2} u$$

nos queda que

$$I(x) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{v^2}{2} \right\} \, dv = \sqrt{2\pi} \, \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma}$$

Reemplazando nos queda que

$$X + Y \sim (f * g)(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2} \right)$$

Es decir, que $X + Y \sim N(0, \sigma^2)$.

Otro Ejemplo: Suma de variables independientes con distribución gama

Recordamos las densidades gama $\Gamma(\alpha, \lambda)$

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \, x^{\alpha-1} \, e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x), \quad E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Proposición

Si $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$ y son independientes, entonces $X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$.

Demostración

$X + Y \sim f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda}$. Hemos de calcular esta convolución:

$$
\begin{aligned}
(f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda})(x) &= \int_0^x \frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \, (x-t)^{\alpha_1 - 1} \, e^{-\lambda(x-t)} \frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} \, t^{\alpha_2 - 1} \, e^{-\alpha t} \, dt \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^x (x-t)^{\alpha_1-1} t^{\alpha_2-1} dt \right) e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

Demostración (2)

En esta integral hacemos el cambio de variable $u = t/x$ $(0 \leq x \leq 1)$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
(f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda})(x) &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1))\Gamma(\alpha_2)} \left(\int_0^1 (x - xu)^{\alpha_1 - 1} \, (xu)^{\alpha_2 - 1} \, x \, du \right) e^{-\lambda x} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} \, u^{\alpha_2-1} \, du \right) e^{-\lambda x} \\
&= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \, B(\alpha_1, \alpha_2) \, x^{\alpha_1+\alpha_2-1} \, e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

donde

$$
B(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^1 (1-u)^{\alpha_1-1} \, u^{\alpha_2-1} \, du \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0
$$

se llama la función Beta de Euler.

Demostración (3)

Notamos que esta es salvo la constante, la densidad gama $f_{\alpha_1+\alpha_2,\lambda}$, pero como la convolución de dos densidades de probabilidad es una densidad de probabilidad, y hay una única constante que hace que la integral sobre $(0,+\infty)$ dé 1 deducimos que:

$$f_{\alpha_1,\lambda} * f_{\alpha_2,\lambda} = f_{\alpha_1,\alpha_2,\lambda}$$

Como subproducto de la demostración obtenemos que:

$$\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\, B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

o sea

$$B(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Densidades beta

La función beta también puede usarse para definir una familia de distribuciones: las distribuciones beta. Diremos que $X \sim \beta(\alpha_1, \alpha_2)$ si se distribuye según la densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \, x^{\alpha_1 - 1} \, (1-x)^{\alpha_2 - 1} \, I_{(0,1)}(x)$$

Parte III

Algunas densidades útiles en estadística

Las densidades χ^2

Recordamos de la clase 9 que si $X \sim N(0,1)$ una variable aleatoria con distribución normal estándar $Y = X^2$ se distribuye según la densidad $\chi_1^2 = \Gamma(1/2, 1/2)$

Sean ahora $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución normal estándar, y consideremos la variable aleatoria

$$Z_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$$

¿cuál es la distribución de Z_n ? Por lo anterior, la densidad de Z será (por la independencia) la convolución de la densidad $\Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ n veces con sigo misma, que por el resultado anterior es $\Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Es decir, que la densidad de Z_n será

Densidad χ_n^2

$$f_{Z_n}(z) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad (x > 0)$$

Esta densidad se conoce como densidad χ^2 con n grados de libertad. Las fórmulas para la esperanza y variancia de las distribuciones gama nos dan que

$$E[Z_n] = n, \quad \mathrm{Var}[Z_n] = 2n$$

Densidad del cociente de dos variables aleatorias independientes

Supongamos que X e Y son variables aleatorias continuas independientes, con densidades f_X y f_Y respectivamente. Supongamos además que Y está concentrada en la semirrecta positiva $(0, +\infty)$. Quremos calcular la densidad del cociente $T = U/V$.

La densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) será $f_X(x)f_Y(y)$ como consecuencia de independencia de las variables X e Y.

Consideramos ahora el cambio de variable $(T, V) = \varphi(X, Y)$ donde donde

$$(u, v) = \varphi(x, y) = (x/y, y)$$

entonces la función inversa será

$$(x, y) = \varphi^{-1}(t, v) = (tv, v)$$

Y la diferencial de φ^{-1} es

$$D\varphi^{-1}(t, v) = \begin{pmatrix} v & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que el Jacobiano es v.

Densidad del cociente de dos variables aleatorias independientes (2)

De acuerdo al teorema de cambio de variable, encontramos que el vector (T, V) se distribuye según la densidad conjunta

$$f_X(tv)f_Y(v)v$$

e integrando respecto la variable v podemos recuperar la densidad (marginal) de T que resulta ser:

$$T \simeq \int_0^\infty f_X(tv)f_Y(v)v \, dv \tag{1}$$

La densidad t de Student

Sea X una variable aleatoria con distribución χ^2 con n grados de libertad, Y una variable aleatoria con distribución normal estándar y supongamos que X e Y son independientes. Queremos calcular la densidad de la variable aleatoria

$$T = \frac{\sqrt{\frac{X}{n}}}{Y}$$

[El porqué esta variable aleatoria es interesante, lo veremos más adelante al desarrollar conceptos de estadística]
Ya vimos que la densidad de X es la χ_n^2. Consideramos $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ dada por

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{x}{n}}$$

es un difeomorfismo cuya inversa es $\varphi^{-1}(y) = ny^2$.

La densidad t de Student (2)

Aplicando la fórmula de cambio de variables, encontramos que la densidad de $U = \sqrt{\frac{X}{n}}$ es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \, (ny^2)^{n/2-1} e^{-ny^2/2} 2ny \; I_{(0,+\infty)}(y) \\ &= \frac{2n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \, y^{n-1} \; e^{-ny^2/2} \; I_{(0,+\infty)}(y) \end{aligned}$$

La densidad t de Student (3)

Utilizando la fórmula para la densidad del cociente de dos variables aleatorias independientes, vemos que T se distribuye según la densidad

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty f_X(tv) f_Y(v) v \, dv \\
&= \frac{2n^{n/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2 v^2/2} \; v^{n-1} \; e^{-nv^2/2} \; v \, dv \\
&= \frac{2^{(1-n)/2} n^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(t^2+n)v^2/2} \; v^n \, dv \quad (t > 0)
\end{aligned}
$$

La densidad t de Student (4)

Hacemos el cambio de variable $x = \frac{v^2}{2}(t^2 + n)$, entonces esta integral se transforma en

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{2^{(1-n)/2} n^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi}} \frac{1}{n+t^2} \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{2x}{n+t^2}\right)^{(n-1)/2} dx \\ &= \frac{n^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi}} \frac{1}{(n+t^2)^{(n+1)/2}} \int_0^\infty e^{-x} x^{(n-1)/2} dx \\ &= \frac{n^{n/2}}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{(n+t^2)^{(n+1)/2}} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{n^{(n+1)/2}}{(n+t^2)^{(n+1)/2}} \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} \quad (t > 0) \tag{2}$$

Esta distribución se conoce como distribución t de Student con n grados de libertad.