Variables Aleatorias Continuas: Esperanza

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Recordamos algunas definiciones y resultados (que vimos en la clase 4)

Recordamos - Variables Aleatorias: Definición Formal

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria será una función $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, con la siguiente propiedad: para cualquier intervalo I de la recta real extendida la preimagen $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ pertenece a $\mathcal{E}$, es decir está definida la probabilidad $P(X^{-1}(I)) = P\{X \in I\}$ de que X tome un valor en el intervalo I. Especificar estas probabilidades es dar la distribución de X.

Observación: En el lenguaje del análisis real esta defición dice que X debe ser una función medible (respecto a la σ-álegbra $\mathcal{E}$).

Recordamos - Distriuciones continuas

Definición

Diremos que la variable X es (absolutamente) continua si existe una función integrable no negativa $f : \mathbb{R} \to R_{\geq 0}$ tal que

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\, dx$$

La función f debe verificar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Se dice que X se distribuye según la densidad de probabilidades $f(x)$ (o que f es la densidad de probabilidad de X). A veces se nota, $X \sim f(x)$.

Nombre en inglés: probability density function (pdf)

Recordamos - Funciones de distribución (acumulada)

Definición

Si $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *es una variable aleatoria, su función de distribución*[a] *será la función* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

Si X *es absolutamente continua, y se distribuye según la densidad* $f(x)$ *tendremos:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

[a] También llamada a veces función de distribución acumulada en la literatura

Nombre en inglés: Cumulative distribution function(cdf).

Recordamos - Propiedades de las funciones de distribución

Teorema

Sea $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una variable aleatoria y* $F = F_X$ *su función de distribución. Entonces* F *tiene las siguientes propiedades:*

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ *y* F *es creciente.*

ii) F *es continua por la derecha.*

iii) $F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x) = P\{X = x_0\}$ *En particular,* F *es continua en* $x = x_0$ *si y sólo si* $P\{X = x_0\} = 0$.

iv) *Si* X *es finita con probabilidad 1 (o sea* $P\{X = \pm\infty\} = 0$*), entonces:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Parte II

La integral de Riemann-Stieltjes y la definición de esperanza

Introducción

La integral de Riemann-Stieltjes es una generalización de la integral de Riemann. Stieltjes observó que cualquier función creciente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ origina una noción de medida de intervalos,

$$m_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Para las aplicaciones a la teoría de probabilidades, nos interesa el caso en que F es la función de distribución de una variable aleatoria.
Stieltjes definió la integral

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \int_{(a,b]} \varphi(x)\, dF(x)$$

donde $(a, b]$ es un intervalo acotado, generalizando la definición de la integral de Riemann, que corresponde al caso especial $F(x) = x$.

Para la integral de Riemann-Stieltjes los puntos pueden no tener medida cero. Por eso es importante la especificación de que trabajaremos con intervalos semi-abiertos (muchos libros no hacen esto, lo que conduce a una definición sutilmente diferente).

Particiones y sumas de Riemann-Stieltjes

Sea

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

una partición del intervalo $(a, b]$ (Dar una partición no es otra cosa que elegir finitos puntos del intervalo en orden creciente) y elijamos puntos intermedios $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}]$ en cada intervalito de la partición (En realidad, estamos trabajando con particiones con puntos marcados, pero no lo haremos explícito en la notación). Consideramos entonces las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_\pi(\varphi, F) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

Definición de la integral de Riemann-Stieltjes

Definición

Diremos que la integral

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \int_{(a,b]} \varphi(x)\, dF(x)$$

existe y toma el valor $I \in \mathbb{R}$ *si las sumas* $S_\pi(\varphi, F)$ *tienden al valor* I *cuando la norma*

$$|\pi| = \max_{0 \leq i \leq n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

de la partición π *tiende a cero, es decir si dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que* $|I - S_\pi(\varphi, F)| < \varepsilon$ *para toda partición* π *con* $|\pi| < \delta$.

Observemos que si $F(x) = x$, la integral de Riemann-Stieltjes se reduce a la integral de Riemann usual.

Un ejemplo: La función escalón de Heaviside

$$H_{x_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < x_0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq x_0 \end{cases}$$

H_{x_0} es la función de distribución de una variable aleatoria que toma el valor x_0 con probabilidad 1. Entonces tenemos:

Lema

Si $x_0 \in [a, b]$ y $\varphi \in C[a, b]$, entones:

$$\int_a^b \varphi(x) dH_{x_0} = \varphi(x_0)$$

Demostración.

En $S_\pi(\varphi, F)$ el único término no nulo corresponde al intervalo $(x_i, x_{i+1}]$ que contiene a x_0, en consecuencia:

$$S_\pi(\varphi, F) = \varphi(\xi_i)$$

y cuando $|\pi| \to 0$, $\varphi(\xi_i) \to \varphi(x_0)$, por la continuidad de φ. $\square$

Una condición para que exista la integral de Stieltjes

El siguiente teorema nos da una condición que permite garantizar la existencia de integrales de Riemann-Stieltjes:

Teorema

Si $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es continua, y si* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es creciente, entonces la integral de Riemann-Stieltjes*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)$$

existe

La prueba pueden verla en el apéndice D de mi apunte.

Convergencia uniforme de las integrales de Stieltjes

Un subproducto de la prueba es el siguiente resultado que nos será útil más adelante:

Teorema

Sea $\varphi \in C[a, b]$*. Dados* $\varepsilon > 0$ *y* $C > 0$*, existe un* $\delta > 0$ *(que depende de* $\varepsilon > 0$ *y* C *pero es independiente de* F*) tal que si* F *es cualquier función* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *creciente tal que*

$$m_F((a, b]) = F(b) - F(a) \leq C$$

entonces

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) - S_\pi(\varphi, F) \right| < \varepsilon$$

para toda partición con puntos marcados con $|\pi| < \delta$*.*

Linealidad

Lema (Linealidad)

1. *Si* $\int_a^b \varphi_1(x) dF(x)$ *y* $\int_a^b \varphi_2(x) dF(x)$ *existen, y* $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ *entonces,* $\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)$ *también existe, y tenemos que:*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(x)\, dF(x) + \lambda_2 \int_a^b \varphi_2(x)\, dF(x)$$

2. *Si* $\int_a^b \varphi(x)\, dF_1(x)$ *y* $\int_a^b \varphi(x)\, dF_2(x)$ *existen, y* $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ *con* $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$*, entonces* $\int_a^b \varphi(x)\, dF$ *existe, y vale que:*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \lambda_1 \int_a^b \varphi(x)\, dF_1(x) + \lambda_2 \int_a^b \varphi(x)\, dF_2(x)$$

Aditividad respecto al intervalo

Lema (Aditividad respecto al intervalo)

Sea $c \in (a, b]$*. Si* $\varphi \in C[a, b]$ *entonces*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \int_a^c \varphi(x)\, dF(x) + \int_c^b \varphi(x)\, dF(x)$$

En este teorema, es importante que estamos trabajando con intervalos abiertos ya que

$$(a, b] = (a, c] \cup (c, b] \text{ (unión disjunta)}$$

Cómo acontar la integral de Riemann-Stieltjes

El siguiente lema, nos dice cómo acotar una integral de Stieltjes:

Lema

Supongamos que $\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)$ *existe, siendo* φ *una función acotada en* $[a,b]$ *y* F *creciente en* $[a,b]$. *Entonces,*

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) \right| \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \right) (F(b) - F(a))$$

Cómo acontar la integral de Riemann-Stieltjes (2)

Más generalmente se puede demostrar que la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)$$

existe si $\varphi(x)$ es continua en $[a, b]$ y F es de variación acotada (ya que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones crecientes). En este caso, la integral se acota del siguiente modo:

$$\left| \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) \right| \leq \left(\sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| \right) V_a^b(F)$$

Parte III

Definición general de esperanza de una variable aleatoria

Definición de Esperanza (1)

Veamos como se aplican las integrales de Riemann-Stieltjes a la teoría de probabilidades. Para ello consideremos una variable aleatoria, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ no discreta y veamos como podríamos definir la esperanza de X. Supongamos por simplicidad primero que X toma valores en un cierto intervalo $(a, b]$ de la recta. Entonces, si tomamos una partición π del intervalo $(a, b]$ (con puntos marcados como antes), podemos considerar una variable aleatoria X_π que aproxima a X del siguiente modo:

$$X_\pi = \xi_i \text{ si } X \in (x_i, x_{i+1}]$$

Definición de Esperanza (2)

Entonces:

$$E[X_\pi] = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i P\{X_\pi = \xi_i\} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i P\{x_i < X \leq x_{i+1}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

es exactamente la suma de Riemann-Stieltjes $S_\pi(\varphi, F)$ con $\varphi(x) = x$, donde $F = F_X$.
Entonces cuando la norma de la partición tiende a cero, $E[X_\pi]$ tiende a la integral

$$\int_a^b x \, dF(x)$$

(que de acuerdo al teorema anterior siempre existe), y podemos aceptar la siguiente definición:

Definición de Esperanza (2)

Definición

Sea X una variable aleatoria que tome valores en un intervalo $(a, b]$ de la recta, entonces la esperanza de X es la integral de Riemann-Stieltjes

$$E[X] = \int_a^b x \, dF(x) \tag{1}$$

siendo $F = F_X$ su función de distribución.

Esperanza de funciones de una variable aleatoria

Más generalmente podemos considerar la variable aleatoria $\varphi(X)$ siendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces:

$$E[\varphi(X_\pi)] = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \cdot P\{X_\pi = \xi_i\} = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \cdot P\{x_i < X \leq x_{i+1}\}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) \cdot (F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

Entonces, cuando la norma de la partición π tiende a cero, estas sumas convergen a la integral:

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)$$

y conjeturamos que

$$E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x)\, dF(x) \tag{2}$$

para toda función continua $\varphi \in C[a, b]$ (aunque demostrar esto directamente de la definición es bastante complicado).

Varianza de una variable aleatoria

En particular,

$$\operatorname{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_a^b (x-\mu)^2 \, dF(x)$$

siendo $\mu = E[X]$.

Ejemplo 1: Variables aleatorias discretas

Sea X una variable aleatoria discreta que toma finitos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en un intervalo $(a, b]$ con probabilidad $p_i = P\{X = x_i\}$. Su función de distribución puede escribirse como:

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \; H_{x_i}(x)$$

donde H_{x_i} es la función escalón de Heaviside que definimos antes.

En consecuencia, por la linealidad de la integral de Riemann-Stieltjes respecto a F:

$$E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x) dF(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \int_a^b \varphi(x) dH_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i)$$

Este resultado coincide con la fórmula anteriormente vista para $E[\varphi(X)]$ para variables discretas.

Variables aleatorias continuas

Lema

Supongamos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función creciente con derivada continua* $F'(x) = f(x)$, *entonces*

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x) = \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

para toda función $\varphi \in C[a, b]$.

Demostración.

Por el teorema del valor medio, $F(x_{i+1}) - F(x_i) = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ para cierto $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Entonces, con esta elección de los puntos intermedios, la suma S_π se puede escribir como

$$S_\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i) f(\xi_i)(x_{xi+1} - x_i)$$

Cuando $|\pi| \to 0$ tiende a cero, se obtiene el resultado. $\square$

Variables aleatorias continuas (2)

Supongamos que X es una variable aleatoria continua con valores en el intervalo $(a, b]$, que tiene la densidad $f(x)$ entonces

$$E[X] = \int_a^b x\, f(x) dx$$

y más generalmente,

$$E[\varphi(X)] = \int_a^b \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

En particular:

$$\mathrm{Var}(X) = E[(x-\mu)^2] = \int_a^b (x-\mu)^2\, f(x) dx$$

siendo $\mu = E[X]$.

Un ejemplo: la distribución uniforme

Si consideramos X una variable con distribución uniforme en el intervalo $(a, b]$ entonces su densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

para $x \in (a, b]$. Con lo que

$$\mu = E(X) = \int_a^b xf(x)\, dx = \frac{a+b}{2}$$

y

$$\mathrm{Var} X = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)\, dx = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Variables no acotadas

¿Qué sucede si X no es una variable aleatoria acotada? En este caso debemos considerar integrales de Riemann-Stieltjes impropias, de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x)$$

Naturalmente definimos esta integral, de la siguiente manera:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) = \lim_{a \to -\infty, b \to +\infty} \int_{a}^{b} \varphi(x)\, dF(x)$$

El problema es que este límite puede no existir. Si φ es no negativa, podemos decir que siempre existe, pero puede valer $+\infty$.

Variables no acotadas (2)

Definición

Sea $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una variable aleatoria, y sea* $F = F_X$ *su función de distribución. Diremos que* X *tiene esperanza finita, o que* X *es integrable, si*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF(x) < +\infty$$

En ese caso, definimos:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, dF(x) \tag{3}$$

Variables no acotadas (3)

Más generalmente, tenemos la fórmula

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dF(x) \tag{4}$$

válida si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|\, dF(x) < +\infty$$

Y cuando X tiene una densidad continua,

$$E[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f(x)\, dx$$

Sin embargo es complicado justificar esto directamente a partir de la definición (3), pues no es sencillo en general establecer cuál es la relación general entre las funciones de distribución $F_{\varphi(X)}$ y F_X.

La función gama

Definición

Definimos la función gama de Euler por

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \;= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \int_r^R x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx$$

para $\alpha > 0$ (que es cuando esta integral converge).

Proposición

La función gamma tiene las siguientes propiedades:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
3. $\Gamma(k) = (k-1)!$ *si* $k \in \mathbb{N}$ *(En consecuencia, la función gama puede pensarse como una generalización del factorial a valores no enteros de la variable).*
4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

La función gama: análisis de la convergencia

Para analizar la convergencia de la integral, la partimos en el 1

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx + \int_1^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx$$

Cuando $x \leq 1$, acotamos usando $e^{-x} \leq 1$,

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \lim_{r\to 0} \int_r^1 x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

(esta integral es impropia cuando $\alpha < 1$ pero converge).
Por otra parte para $x \geq 0$ y cualquier $k \in \mathbb{N}$ vale la acotación,

$$e^x = \sum_{j=0}^\infty \frac{x^j}{j!} \geq \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{k!}{x^k}$$

Luego si $0 < \alpha < k$ tenemos

$$\int_1^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-x}\, dx \leq \int_1^\infty x^{\alpha-1}\, \frac{k!}{x^k}\, dx = \frac{k!}{k-\alpha}$$

La función gama: demostración de las propiedades (2)

La propiedad 1) es inmediata de la definición:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R e^{-x}\, dx = \lim_{R \to +\infty} 1 - e^{-R} = 1$$

La función gama: demostración de las propiedades (2)

La propiedad 2) se prueba integrando por partes:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \int_r^R x^\alpha \; e^{-x} \; dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \int_r^R x^\alpha \; (-e^{-x})' \; dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} - x^\alpha e^{-x}\Big|_0^R + \int_r^R (x^\alpha)' \; e^{-x} \; dx \\
&= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} -R^\alpha e^{-R} + r^\alpha e^{-r} + \int_r^R \alpha x^{\alpha-1} \; e^{-x} \; dx \\
&= \alpha \int_0^\infty x^{\alpha-1} \; e^{-x} \; dx \\
&= \alpha \Gamma(\alpha)
\end{aligned}
$$

La función gama: demostración de las propiedades (3)

La propiedad 3) $\Gamma(k) = (k-1)!$ se deduce entonces de las propiedades 1) y 2) por inducción

Si $k = 1$ ya vimos que vale. El paso inductivo es:

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!$$

La propiedad 4) sale con un cambio de variable: $x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x}, dx = 2ydy$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx \;= \int_0^\infty \frac{1}{y}\, e^{-y^2}\, 2ydy = 2\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Otra propiedad útil

Si $\lambda > 0$ con el cambio de variable $y = \lambda x$, podemos escribir

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}\, e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha-1}\, e^{-y}\, \frac{dy}{\lambda} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$$

Ejemplo: la distribución exponencial

Definición

Se dice que la variable aleatoria tiene distribución exponencial $Exp(\lambda)$ *(donde* $\lambda > 0$*) cuando su densidad de probabilidad es*

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$$

Entonces si $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \, \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

En particular

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Otro ejemplo que ya vimos la clase pasada es el de la distribución normal.

Una generalización: las distribuciones gama

Definición

Decimos que X se distribuye según la distribución gama $\Gamma(\alpha, \lambda)$ (siendo $\alpha, \lambda > 0$) si su función de densidad de probabilidad es:

$$f_{\alpha,\lambda}(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} I_{(0,+\infty)}(x)$$

Notamos que $\Gamma(1, \lambda) = \text{Exp}(\lambda)$. Nuevamente

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^n \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \, dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

En particular

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Un ejemplo de una variable aleatoria que no es continua ni discreta

Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$ y consideramos $Y = \max(X, 1/2)$, entonces:

$$Y = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad X \leq 1/2 \\ X & \text{si} \quad X > 1/2 \end{cases}$$

Un ejemplo de una variable aleatoria que no es continua ni discreta (2)

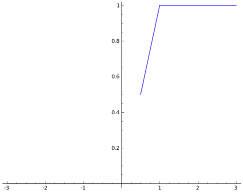
Calculemos la función de distribución de Y:

$$F_Y(x) = P\{Y \leq x\} = P\{X \leq x \ \wedge \ 1/2 \leq x\}$$

Deducimos que:

$$F_Y(x) = \begin{cases} P(\emptyset) = 0 & \text{si} \quad x < 1/2 \\ P\{X \leq x\} = x & \text{si} \quad 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Deducimos que Y no es una variable discreta ya que F_Y no es una función escalera, y que tampoco Y es una variable absolutamente continua ya que F_Y no es continua.



Un ejemplo de una variable aleatoria que no es continua ni discreta (3)

Calculemos la esperanza de Y, esto puede hacerse de varias formas, por ejemplo usando la aditividad con respecto al intervalo de integración:

$$E[Y] = \int_0^1 x\, dF(x) = \int_0^{1/2} x\, dF + \int_{1/2}^1 x\, dF$$

En el intervalo cerrado $[0, 1/2]$ la función F coincide con la función $\frac{1}{2}H_{1/2}$ en consecuencia:

$$\int_0^{1/2} x\, dF = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} x\, dH_{1/2} = \frac{1}{4}$$

mientras que:

$$\int_{1/2}^1 x\, dF(x) = \int_{1/2}^1 x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

pues en $[1/2, 1]$ la función $F(x)$ tiene derivada continua $F'(x) = 1$. Concluimos que:

$$E[Y] = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

Un ejemplo de una variable aleatoria que no es continua ni discreta (4)

Otra manera de hacer la cuenta es considerar la función de variable real $\varphi(x) = \text{máx}(x, 1/2)$ y utilizar la fórmula para $E[\varphi(X)]$:

$$E[\varphi(X)] = \int_0^1 \text{máx}(x, 1/2)\, dx = \int_0^{1/2} 1/2\, dx + \int_{1/2}^1 x\, dx = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$