Paseos al Azar

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Una pregunta que plantearon en la clase pasada

En la clase anterior me plantearon la siguiente

Pregunta

¿Sirve la teoría de probabilidades para entender otras ramas del análisis (ademàs de la teoría de la medida)? ¿por ejemplo las ecuaciones diferenciales?

Les dije que la respuesta era un contundente SI. Que la teorìa de probabilidades servìa para entender a nivel microscópico las ecuaciones diferenciales (en derivadas parciales, o EDP), y que esta interacción entre ambas teorías es de fundamental importancia en el desarrollo moderno de ambas.

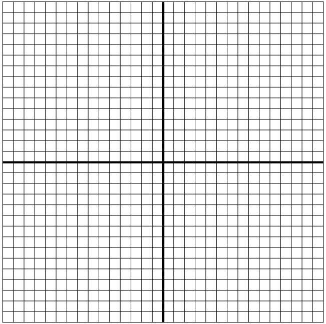
Hoy voy a tratar de explicarles porqué con un ejemplo simple.

La Grilla

Consideramos una grilla o retículo en el plano

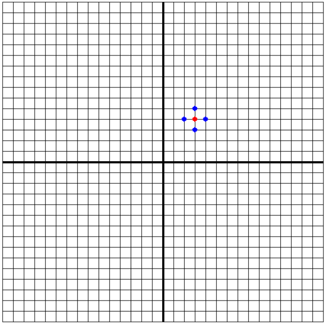
$$G = \{(ih, jh) : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

donde $h > 0$ es un parámetro. A los puntos de la grilla los llamaermos nodos.



Nodos Vecinos

Dado un nodo (ih, jh) de la grilla, sus vecinos son los puntos $((i-1)h, jh), (i+1)h, jh), (ih, (j-1)h), (ih, (j+1)h)$.



Los vecinos del nodo rojo son los nodos azules.

Paseo al azar

Consideramos un bichito que efectua paseo al azar sobre la grilla. Trabajaremos con un tiempo discreto $t \in \mathbb{N}_0$. Empezamos en una posición inicial X_0. Llamamos X_t a la posición al tiempo t. Será un vector aleatorio con valores en G.

En casa tiempo, suponiendo que estamos en un nodo X_{t-1} elegimos con probabilidad $1/4$ uno de sus vecinos y nos movemos a él.

$$P\{X_{t+1} = q/X_t = p\} = 1/4$$

para todo nodo q vecino a p.

Notamos que este proceso define una cadena de Markov donde los posibles estados son los puntos de la grilla.

Tener una variable aleatoria X_t para cada tiempo t usualmente se denomina un proceso estocástico.

Trayectorias

Aunque nuestro proceso tiene tiempo discreto, podríamos convertirlo en un proceso con tiempo continuo $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, especificando que cuando $n < t < n+1$ con $i \in \mathbb{N}_0$, nuestro bichito se mueve del nodo X_n al X_{n+1} en linea recta a velocidad uniforme.

$$X_n = X_n + (t-n)(X_{n+1} - X_n), \quad n < t < n+1$$

Ahora las trayectorias de nuestro proceso serán curvas continuas (poligonales).

Tiempo de salida de un dominio

Ahora consideramos un abierto acotado $U \subset \mathbb{R}^2$ con frontera suave (por ejemplo: un círculo).
Supongamos que nuestro proceso (X_t) comienza en un punto $X_0 \in \overline{U}$.

Notamos

$$\tau = \text{mín}\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : X_t \notin U\}$$

al tiempo que nuestro proceso tarda en salir del dominio U (o $\tau = +\infty$ si nunca salimos). Se llama el tiempo de parada para nuestro proceso.
Como las trayectorias son continuas no podemos salir de U sin cruzar la frontera ∂U, es decir

$$X_\tau \in \partial U$$

¿Por dónde salimos?

Ahora consideramos una parte de la frontera $\Gamma \subset \partial U$. Por ejemplo

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\partial U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

Nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de salir por Γ suponiendo que a tiempo $t_0 \in \mathbb{N}$ arrancamos en $x_0 \in G$?
Definimos una función $u_h : G \to [0, 1]$

$$u_h(x_0) = P\{X_\tau \in \Gamma / X_{t_0} = x_0\}$$

Notemos que en realidad esta probabilidad no depende del tiempo inicial t_0 por la falta de memoria del proceso.

¿Qué propiedad cumple u_h?

Si a tiempo $t_0 \in \mathbb{N}$ estamos en un nodo x_0, a tiempo $t_0 - 1$ tenemos que haber estado en alguno de sus vecinos (y hay un $1/4$ de probabilidad para cada uno).

$$P\{X_\tau \in \Gamma / X_{t_0} = x_0\} = \frac{1}{4} \sum_{v \sim x_0} P\{X_\tau \in \Gamma / X_{t_0 - 1} = v\}$$

donde notamos por $\sim$ la relación de ser vecinos. O sea:

$$u_h(x_0) = \frac{1}{4} \sum_{v \sim x_0} u_h(v)$$

Es decir que u_h verifica la propiedad discreta del valor medio. El valor de u_h en un nodo x_0 es el promedio de los valores de u_h en los nodos vecinos.
Las funciones que la cumplen se llaman funciones armónicas discretas.

¿Dónde aparecen las ecuaciones diferenciales?

Ahora si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2, tenemos usando el desarrollo de Taylor que

$$\frac{1}{4}\sum_{v\sim x_0} u_h(v) = u(x_0) + \frac{1}{2}\Delta u(x_0)h^2 + o(h^2)$$

donde Δu es el Laplaciano de u.

$$\Delta u(x_0) = u_{xx}(x_0) + u_{yy}(x_0)$$

La ecuación para u_h puede escribirse

$$\frac{1}{2h^2}\left[u_h(x_0) - \frac{1}{4}\sum_{v\sim x_0} u_h(v)\right] = 0$$

Entonces, cuando $u_h \to 0$ es esperable que u converja a la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U \\ u = 1 & \text{en } \Gamma \\ u = 0 & \text{en } \partial U - \Gamma \end{cases}$$

(Para dominios buenos, hay una solución única)

Solución para el círculo

Por ejemplo si U es el círculo como antes, la solución del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 \quad \text{en } U \\ u &= f \quad \text{en } \partial U \end{cases}$$

viene dada por

$$u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(cost, \text{sen}\ t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le r < 1$$

donde el núcleo de Poisson es

$$P_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} = \text{Re}\left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}}\right), \quad 0 \le r < 1$$

Así que en nuestro ejemplo

$$u(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(\theta - t)\,\mathrm{d}t, \quad 0 \le r < 1$$