Variables Aleatorias y Distribuciones de Probabilidad

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Variables Aleatorias: Definición y algunos ejemplos

Variables Aleatorias: Definiciones Previas

Intuitivamente una variable aleatoria es un número asociado al resultado de un experimento aleatorio. Por ejemplo, cuando efectuamos una medición. Por razones técnicas, es conveniente a veces considerar variables aleatorias con valores en la recta real extendida

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

donde convenimos que

$$-\infty < x < +\infty \; \forall \, x \in \mathbb{R}$$

Los intervalos en la recta real extendida serán los cojuntos de la forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

siendo $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a \leq b$. Notamos que con esta definición una semirrecta $[-\infty, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x \leq a\}$ es un intervalo de la recta real extendida.
A la σ-álgebra generada por los intervalos la llamaremos σ-álgerba de Borel de $\overline{\mathbb{R}}$, y sus elementos se llamarón conjuntos borelianos de $\overline{\mathbb{R}}$.

Variables Aleatorias: Definición Formal

La definición formal tiene un requisito técnico extra:

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ un espacio de probabilidad. Una variable aleatoria será una función $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, con la siguiente propiedad: para cualquier intervalo I de la recta real extendida la preimagen $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ pertenece a $\mathcal{E}$, es decir está definida la probabilidad $P(X^{-1}(I)) = P\{X \in I\}$ de que X tome un valor en el intervalo I. Especificar estas probabilidades es dar la distribución de X.

Observación: En el lenguaje del análisis real esta defición dice que X debe ser una función medible (respecto a la σ-álegbra $\mathcal{E}$).

Observación: Es equivalente pedir que $X^{-1}(B)$ sea un evento para todo $B \subset \overline{\mathbb{R}}$ boreliano. Esto sale de que

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega : X^{-1}(A) \in \mathcal{E}\}$$

es una σ-álgebra. Por lo que si contiene a los intervalos, debe contener a la σ-álgbera de Borel.

Especificar estas probabilidades es dar la distribución de X.

Variables Aleatorias Discretas

Dentro de las variables aleatorias un caso especial, más fácil de tratar en general, es el de las variables aleatorias discretas. Una variable aleatoria $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ se dirá discreta si

$$Im(X) = \{y \in \overline{\mathbb{R}} : \text{existe } \omega \in \Omega \text{ tal que } y = X(\omega)\}$$

es finito o infinito numerable.

En este caso, el requisito técnico en la definición se simplifica: necesitamos que para todo $y \in \overline{\mathbb{R}}$ el conjunto

$$X^{-1}(\{\ y\}) = \{\omega \in \Omega : y = X(\omega)\}$$

sea un evento, o se que para cada $y \in Im(X)$ esté definida la probabilidad $P\{X = y\}$.

Esto se debe a que si I es un intevalo,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I \cap Im(X)\} = \bigcup_{y \in I \cap Im(X)} \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y\}$$

e $I \cap Im(X)$ es un conjunto numerable, por lo que este conjunto es un evento.

Variables Aleatroias discretas (2)

Entonces toda la información sobre la distribución de una variable aleatoria discreta está contenida en su función de distribución puntual

$$f(y) = P\{X = y\}$$

Esta función vale 0 salvo si $y \in Im(f)$, y se debe cumplir que

$$\sum_{y \in Im(f)} f(y) = 1$$

En inglés se suele llamar probability mass function, abreviado pmf (función de masa de probabilidad).

Un ejemplo que ya vimos: el esquema de ensayos de Bernouli

Consideramos un experimento aleatorio con dos resultados que convencionalmente se llaman

- éxito (1) con probabilidad p.
- fracaso(0) con probabilidad $q = 1 - p$.

Introdujimos las variables aleatorias de Bernoulli $X_i : \Omega^\infty \to \mathbb{R}$ dadas por

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la i-ésima realización del experimento es un éxito} \\ 0 & \text{si la i-ésima realización del experimento es un fracaso} \end{cases}$$

Las X_i son variables aleatorias discretas. También lo es el número de éxitos en n ensayos.

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Como ya vimos S_n tiene distribución binomial; $S_n \sim Bi(n, p)$

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

¿Porqué se llama distribución binomial?

El nombre de esta distribución de probabilidades se debe a que sus probabilidades son los términos en el desarrollo del binomio de Newton

$$1 = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Esto dice que estos números efectivamente forman una distribución de probabilidades.

De modo que

$$P\{0 \leq S_n \leq 1\} = \sum_{k=0}^{n} P\{S_n = k\} = 1$$

Esperando el primer éxito

En el esquema de infinitos ensayos de Bernoulli podemos considerar cuántos ensayos debemos realizar hasta obtener el primer éxito. Esto define una nueva variable aleatoria T

$$T = \min_{i \in \mathbb{N}} \{X_i = 1\}$$

donde convenimos en que $T = +\infty$ si $X_i = 0$ para todo i (todos los infinitos ensayos son fracasos)
¿Cuál es la distribución de T? Para que $T = k$ debe ocurrir que

$$X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1$$

(las primeras $k-1$ realizaciones del experimento tienen que haber sido fracasos, y la $k-1$ un éxito). Como discutimos la vez pasada la probabilidad de este evento es

$$P\{T = k\} = q^{k-1} \cdot p$$

(En la primer clase vimos el ejemplo donde tirábamos una moneda equilibrada hasta que salga cara, donde $p = q = 1/2$) Esta distribución se llama distribución geométrica de parámetro p. Notación: $T \sim \mathcal{G}(p)$.

¿Porqué se llama distribución geométrica?

Nuevamente si usamos la fórmula de la serie geométrica vemos que si $q < 1$ (o sea si $p > 0$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p \sum_{j=0}^{\infty} q^j = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Como

$$\{T < +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T = k\} \text{ unión numerable disjunta}$$

vemos que T es finita con probabilidad 1, mientras que

$$P\{T = +\infty\} = 0$$

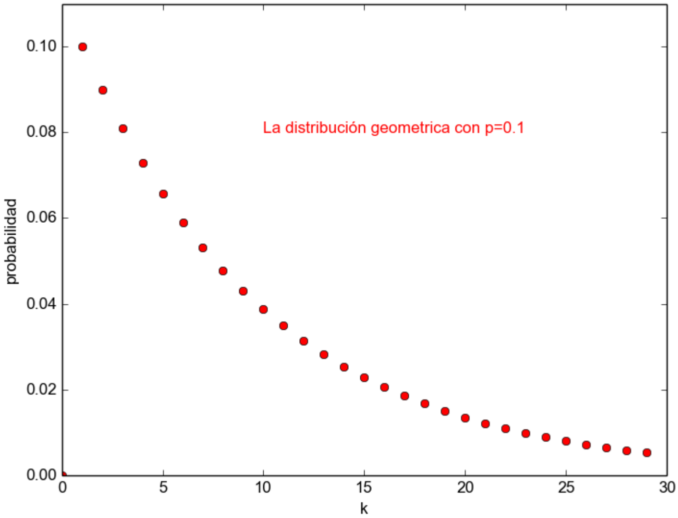
T es un ejemplo de una variable aleatoria discreta que toma infinitos valores, y que puede tomar valores infinitos.
Importante: Si $p = 0$ entonces $T = +\infty$ con probabilidad 1.

Dibujándola en la computadora

Programita en Python, usando SciPy

```
import numpy as np
import scipy.stats
import matplotlib.pyplot as plt
p=0.1
hasta=30
distribucion=scipy.stats.geom(p)
x=np.arange(start=0,stop=hasta)
y=distribucion.pmf(x)
y_maximo=max(y)*1.1
plt.axis([0, hasta, 0, y_maximo])
plt.xlabel("k")
plt.ylabel("probabilidad")
texto = 'La distribución geometrica con p=' + str(p)
plt.text(10, 0.08, texto, color='r')
grafico=plt.plot(x,y,'ro')
plt.show()
```

Dibujándola en la computadora (2)



La distribución Uniforme en $[0,1]$

Un tipo muy diferente de variable aleatoria surgió en el experimento donde elegíamos un número real en el intervalo $[0,1]$, que consideramos en la clase 2.

Recordamos que a cada realización $\omega \in \Omega$ del experimento de tirar infinitas veces la moneda le asignamos un número real $X(\omega)$ con la propiedad de que

$$P\{X(\omega) \in I\} = |I|$$

donde $I = [a,b] \subset [0,1]$ es un subintervalo diádico de $[0,1]$ e $|I| = b-a$ denota su medida. Utilizando las propiedades de continuidad de la probabilidad (con respecto a uniones crecientes), se puede ver que esto mismo vale para cualquier subintervalo de $[0,1]$.

Decimos que X es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0,1]$.Notación: $X \sim \mathcal{U}(0,1)$.
Notemos que X es una variable aleatoria que toma una cantidad no numerable de valores ya que $Im(X) = [0,1]$. Luego no es una variable aleatoria discreta.
Notemos que para cualquier número real y, $P\{X = y\} = 0$.

La distribución Uniforme en un intervalo $[a, b]$ cualquiera

Definición

Más generalmente si $[a, b]$ es un intervalo de la recta, decimos que Y tiene distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ (Notación: $Y \sim \mathcal{U}(a, b)$) si para cualquier intervalo $I \subset [a, b]$ la probabilidad de que X pertenezca a I es proporcional a la medida de I, es decir:

$$P\{Y \in I\} = \frac{|I|}{b - a}$$

Observación (Un primer ejemplo de un cambio de variable)

Si $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ e $Y = (b - a)X + a$ entonces $Y \sim \mathcal{U}(a, b)$.

Notando $f : [0, 1] \to [a, b]$, $f(x) = (b - a)x + a$ vemos que f es biyectiva y $f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$, luego

$$P\{Y \in I\} = P\{f(X) \in I\} = P\{X \in f^{-1}(I)\} = |f^{-1}(I)| = \frac{1}{b - a}|I|$$

Distriuciones continuas

Definición

Diremos que la variable X es (absolutamente) continua si existe una función integrable no negativa $f : \mathbb{R} \to R_{\geq 0}$ tal que

$$P\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\, dx$$

La función f debe verificar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

Se dice que X se distribuye según la densidad de probabilidades $f(x)$ (o que f es la densidad de probabilidad de X). A veces se nota, $X \sim f(x)$.

Nombre en inglés: probability density function (pdf)

Funciones de distribución (acumulada)

Definición

Si $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *es una variable aleatoria, su función de distribución*[a] *será la función* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$F_X(x) = P\{X \leq x\}$$

Si X *es absolutamente continua, y se distribuye según la densidad* $f(x)$ *tendremos:*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

[a] También llamada a veces función de distribución acumulada en la literatura

Nombre en inglés: Cumulative distribution function(cdf).

La distribución uniforme (1)

La distribución uniforme $\mathcal{U}(a,b)$ es una distribución de probabilidad continua con la densidad

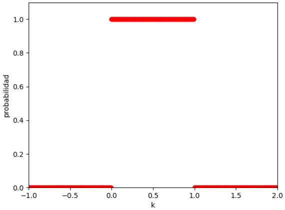
$$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$$

donde

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

denota la función indicadora del evento A (en análisis real se suele llamar función característica, pero en la teoría de probabilidades este nombre tiene otro significado).

Por ejemplo la densidad de la distribución $\mathcal{U}(0,1)$ es

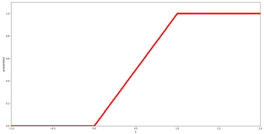


La distribución uniforme (2)

Su función de distribución es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } \; x > a \end{cases}$$

Por ejemplo la función de distribución de $\mathcal{U}(0,1)$ es

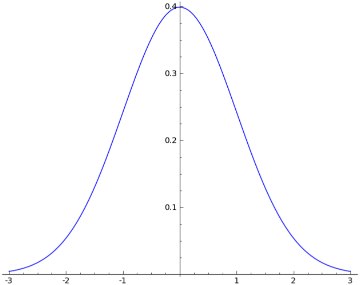


Un ejemplo: la distribución normal(1)

Decimos que X tiene **distribución normal**, y lo notaremos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, si su función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

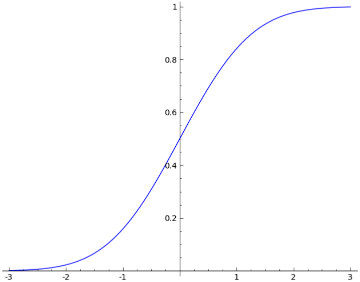
donde μ, σ son dos parámetros reales con $\sigma > 0$. El caso $\mu = 0$, $\sigma = 1$, es decir $N(0, 1)$, se conoce como **distribución normal estándar**.



Un ejemplo: la distribución normal (2)

Si $X \sim N(0,1)$, la función de distribución de X será la función:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-(t-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dt \tag{1}$$



Un ejemplo: la distribución normal (3)

- Veremos más adelante que la distribución normal resulta útil por ejemplo para aproximar la distribución binomial, del número S_n de éxitos en n ensayos de Bernoulli, cuando el número de ensayos es grande.
- Más generalmente, se puede usar para aproximar la suma de muchas variables aleatorias independientes cada una de las cuáles hace una pequeña contribución a la varianza de la suma (Este es el contenido del Teorema del Límite Central). Como consecuencia, esta distribución juega un papel central en estadística. Se conoce también como distribución de Laplace o de Gauss.
- Muchas ejemplos de datos reales se ajustan muy bien a esta distribución. Un ejemplo clásico es la altura en la población humana.

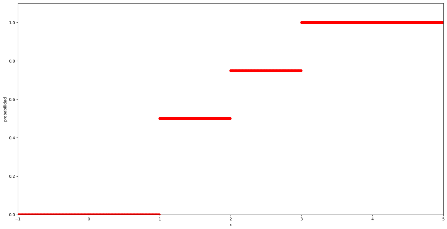
La función de distribución de una variable aleatoria discreta

Consideremos una variable aleatoria discreta con 3 valores $1, 2, 3$ tal que

$$P\{X = 1\} = \frac{1}{2}, P\{X = 2\} = P\{X = 3\} = \frac{1}{4}$$

Definiendo una distribución de probabilidad discreta

```
xk = (1, 2, 3)
pk = (0.5, 0.25, 0.25)
distribucion = scipy.stats.rv_discrete(values=(xk, pk))
```



Propiedades de las funciones de distibución

El siguiente teorema nos dice que propiedades tienen las funciones de distribución:

Teorema

Sea $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *una variable aleatoria y* $F = F_X$ *su función de distribución. Entonces* F *tiene las siguientes propiedades:*

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ *y* F *es creciente.*

ii) F *es continua por la derecha.*

iii) $F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x) = P\{X = x_0\}$ *En particular,* F *es continua en* $x = x_0$ *si y sólo si* $P\{X = x_0\} = 0$.

iv) *Si* X *es finita con probabilidad 1 (o sea* $P\{X = \pm\infty\} = 0$*), entonces:*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Interpretación de los saltos

Observación

La propiedad

$$F(x_0) - \lim_{x \to x_0^-} F(x) = P\{X = x_0\}$$

significa que los saltos de una función de distribución nos indican cuando la probabilidad se concentra en un punto dado x_0*, y que la magnitud del salto nos dice cuanta probabilidad se concentra en ese punto* x_0*.*

Observación

Es útil observar que como consecuencia de estas propiedades, los puntos de discontinuidad de una función de distribución son a lo sumo numerables. (Esto se prueba observando que para cada k*, sólo puede haber a lo sumo* k *puntos donde el salto de la función de distribución sea mayor que* $1/k$*).*

Demostración (1)

i) Que $0 \leq F(x) \leq 1$ es obvio por ser $F(x)$ una probablidad. Si $x_1 \leq x_2$ tenemos que: $\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$, y en consecuencia $F(x_1) \leq F(x_2)$.
ii) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y consideremos una sucesión decreciente $(x_n)_{n \in N} \downarrow x_0$ que converja a x_0. Entonces,

$$\{X \leq x_0\} = \bigcap_{n \in N} \{X \leq x_n\}$$

Es la intersección de una familia decreciente numerable de eventos. Entonces, por las propiedades de continuidad de la probabilidad:

$$P\{X \leq x_0\} = \lim_{n \to +\infty} P\{X \leq x_n\}$$

Es decir que:

$$F(x_0) = \lim_{n \to +\infty} F(x_n)$$

Y como esto vale para toda sucesión $(x_n) \downarrow x_0$ decreciente, que converja a x_0 deducimos que:

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} F(x)$$

Es decir, que F es continua por la derecha.

Demostración (2)

iii) Análogamente, sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y tomemos una sucesión creciente $(x_n)_{n\in N} \uparrow x_0$ que converja a x_0. Ahora tenemos que,

$$\{X < x_0\} = \bigcup_{n\in N} \{X \leq x_n\}$$

Entonces, aplicando nuevamente las propiedades de continuidad de la probabilidad:

$$P\{X < x_0\} = \lim_{n\to+\infty} P\{X \leq x_n\}$$

Es decir que:

$$P\{X < x_0\} = \lim_{n\to+\infty} F(x_n)$$

Como esto valle para toda sucesión $(x_n)_{n\in N} \uparrow x_0$ que converja a x_0, deducimos que:

$$\lim_{x\to x_0^-} F(x) = P\{X < x_0\}$$

En consecuencia,

$$F(x_0) - \lim_{x\to x_0^-} F(x) = P\{X \leq x_0\} - P\{X < x_0\} = P\{X = x_0\}$$

Demostración (3)

En particular, F será continua por la izquierda en x_0 (y por lo tanto continua en x_0) si y sólo si $P\{X = x_0\} = 0$.

iv) Es análoga tomando sucesiones crecientes (decrecientes) tales que $x_n \to \pm\infty$. ¡Queda como ejercicio para cuando preparen el final!

Estas propiedades caracterizan a las funciones de distribución

Recíprocamente es posible probar que estas propiedades caracterizan a las funciones de distribución, en el sentido de que cualquier función F con estas propiedades será la función de distribución de alguna variable aleatoria X.

Teorema

Si F verifica las propiedades del teorema anterior y $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, entonces $X = F^{-1}(U)$ es una variable aleatoria con distribución F.

La demostración es fácil si $F : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función biyectiva estrictamente creciente (como en el caso de la distribución normal) porque en este caso podemos escribir:

$$P\{X \leq x_0\} = P\{F^{-1}(U) \leq x_0\} = P\{U \leq F(x_0)\} = F(x_0)$$

Inversas generalizadas

En general, F no será estrictamente creciente ni biyectiva. Pero como F es creciente, siempre podemos definir la inversa generalizada de la función F como

$$F^{-1} : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}, F^{-1}(y) = \text{ínf}\{x : F(x) \geq y\}$$

Entonces se verifica que:

$$F(x_0) \geq y \Leftrightarrow x_0 \geq F^{-1}(y)$$

(y tomando $y = U$ esto permite justificar la cuenta anterior) [La implicación $\Leftarrow$ requiere usar la continuidad por la derecha de F]

Referencia:
A note on generalized inverses- Paul Embrechts- Marius Hofert - Mathematical Methods of Operations Research 77(3), 423-432
`https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/generalized_inverse.pdf`

Parte II

¿Cómo hacen las computadoras para generar números pseudo-aleatorios?

Números Pseudo-Aleatorios

Una pregunta que me hicieron en la clase pasada es ¿cómo hace la computadora para producir números aleatorios?

Como vimos anteriormente, para simular experimentos aleatorios en una computadora muchas veces se usa un generador de números pseudo-aleatorios. Estos números no son realmente aleatorios, sino que son generados mediante un algoritmo determinístico. Pero tienen la apariencia de ser aleatorios. Esto se comprueba mediante test estadísticos.

Usualmente los generadores de números pseudo aleatorios utilizan herramientas de la teoría de números como congruencias.

Aunque existen muchos métodos para esto, para darles alguna idea de como funcionan les voy a contar el que usaba mi primer computadora: la ZX-spectrum. Es el generador de números pseudo-aleatorios de Lehmer (1954).

Recordatorio de álgebra I: La aritmética modular

Consideramos un número primo p. Notamos $\mathbb{Z}_p =$ al conjunto de las clases de congruencia de enteros módulo p. Hay p clases de congruencia módulo p.

$$\mathbb{Z}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

y por $\mathbb{Z}_p^*$ a las clases de números coprimos con p, esto es (si p es primo)

$$\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

Con la operación de producto módulo p, $\mathbb{Z}_p^*$ tiene estructura de grupo abeliano. Por ejemplo, la siguiente es la tabla del producto módulo 5:

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Ejemplo:

$$3 \cdot 4 = 12 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow \overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{2}$$

Raices Primitivas módulo un número primo

Si p es un número primo, decimos que g es una raíz primitiva módulo p, si g^n módulo p recorre los valores $1, 2, \ldots, p-1$ cuando n recorre esos mismos valores. Por ejemplo: si elejimos $p = 23$, $g = 5$ es una raíz primitiva módulo p ya que tenemos la siguiente tabla de valores:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g^n	5	2	10	4	20	8	17	16	11	9	22

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
g^n	18	21	13	19	3	15	6	7	12	14	1

En el lenguaje del álgebra: $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo cíclico. Una raíz primitiva módulo p es un generador de dicho grupo.

Teorema

Para todo primo p, existen raices primitivas.

El generador de números pseudo-aleatorios de Lehmer

Este generador de números pseudo-aleatorios usa la secuencia

$$x_{k+1} \equiv g \cdot X_k \pmod{p}$$

donde p es un número primo y g es una raíz primitiva módulo p. Si elegimos g y p convenientemente estos números pueden parecer aleatorios.
Por ejemplo, la ZX-Spectrum usaba

$$p = 2^{16} + 1 = 65537, g = 75$$

Programita en Python para generar números pseudo-aleatorios

```
p= 2**16+1
g= 75
x= 1 #semilla del generador

def generador():
        global x
        x=(x*g)%p
        return x
```

Simulando distribuciones de probabilidad

La ZX-spectrum entonces tenía una función RND que simulaba la distribución $\mathcal{U}(0,1)$ (aproximadamente) generando un número pseudo aleatorio x con este algoritmo y tomando $U = x/p$.

Como vimos antes, si sabemos simular la distribución uniforme podemos simular cualquier otra distribución de probabilidad F ya que si $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, entonces $X = F^{-1}(U)$ es una variable aleatoria con distribución F.

Scipy ya provee funciones para generar números pseudo-aleatorios con la distribución que quieran:

Generar 5 números pseudo-aleatorios con distribución normal

```
from numpy.random import default_rng
rng = default_rng(100) #semilla
from scipy.stats import norm
norm.rvs(size=5, random_state=rng)
```