El Espacio Muestral

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Parte I

Espacios Muestrales Finitos

Introducción

En esta clase introuciremos una definición axiomática de la probabilidad, que será el punto de partida de toda la teoría que vamos a desarrollar. Más específicamente, nuestro modelo matemático de los experimientos aleatorios serán los espacios de probabilidad $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ con 3 elementos:

- Un conjunto Ω al que llamaremos espacio muestral, que representará los posibles resultados del experimento aleatorio.
- Una clase $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de subconjuntos de Ω que llamaremos los eventos. Representan condiciones que pueden ocurrir o no en cada realización del experimento aleatorio.
- Una función $P : \mathcal{E} \to [0, 1]$ que asigna una probabilidad a cada evento.

Cuando el espacio muestral Ω es finito, es posible tomar $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$. Sin embargo, cuando Ω es infinito, aparecen dificultades técnicas que hacen que en general no sea posible asignarle una probabilidad a cada subconjunto de Ω.

La definición clásica de Laplace

Como discutimos la clase pasada, esta definición considera experimento con un número finito de resultados que se consideran equiprobables:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

Se toma $\mathcal{E} = \Omega$ y se le asigna a cada evento $A \subset \Omega$ la probabilidad

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

- Por ejemplo, en el experimento de arrojar un dado $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la probabilidad de que salga un número par es

$$P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Recordamos que la propiedad fundamental que tienen las probabilidades es su aditividad finita:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Definición axiomática de la probabilidad (provisional)

En general haremos las siguientes suposiciones básicas (axiomas de la probabilidad)

1. La clase $\mathcal{E}$ es un álgebra (de Boole) de conjuntos. Esto es: $\emptyset, \Omega \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es cerrada por las operaciones de unión y complemento (respecto a Ω).
2. $P : \mathcal{E} \to [0,1]$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$.
3. aditividad finita:

$$\text{Si } A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Algunas consecuencias inmediatas de estos axiomas

- Como

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \text{ (ley de De Morgan)}$$

$$A - B = A \cap B^c$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

se deduce que $\mathcal{E}$ también es cerrada por intersecciones, diferencias y diferencias simétricas.

- Por inducción en n, se deduce que:

Aditividad finita en general

Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ son eventos disjuntos, o sea

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ para todo } i, j \text{ con } \; i \neq j$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Una primera generalización: espacios muestrales finitos

Una primera generalización de la definición de Laplace aparece al considerar resultados no equiprobables. Podemos pensar que

$$P(\{\omega_i\}) = p_i$$

donde $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es un vector de probabilidades es decir

$$0 \leq p_i \leq 1 \text{ para todo } i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Entonces para que valga la propiedad de aditividad finita, debemos asignarle a cada $A \subset \Omega$ la probabilidad

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

Cuando los resultados son equiprobables,

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$$

y recobramos la definición de Laplace.

Algunas consecuencias de la aditividad finita (1)

Proposición

Si A y B son dos eventos y $A \subset B$ entonces

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

En particular, la probabilidad es creciente:

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

Demostración.

Como $A \subset B$,

$$B = A \cup (B - A) \text{ unión disjunta}$$

luego

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

de donde, despejando $P(B - A)$ obtenemos el resultado. $\square$

Consecuencias de la aditividad finita (2)

Corolario (Elegimos $B = \Omega$)

Si A es un evento y $A^c = \Omega - A$ su complemento, entonces

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Consecuencias de la aditividad finita (3)

Proposición

Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En particular, la probabilidad es subaditiva:

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

Demostración:

$$A \cup B = (A - A \cap B) \cup (A \cap B) \cup (B - A \cap B) \text{ (unión disjunta)}$$

luego como $A \cap B \subset A$ y $A \cap B \subset B$, usando lo anterior

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A - A \cap B) + P(B \cap B) + P(B - A \cap B) \\ &= [P(A) - P(A \cap B)] + P(B \cap B) + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Consecuencias de la aditividad finita (5)

Proposición (Fórmula de inclusiones y exclusiones, ejercicio 3 de la práctica 2)

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ eventos. Entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left\{ \sum P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right\}$$

donde para cada k, la segunda suma recorre las $\binom{n}{k}$ formas de elegir k conjuntos entre los (A_i).

Observación: Hay entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

términos en total en la suma del segundo miembro.

La demostración se hace por inducción en n.

Consecuencias de la aditividad finita (6)

Proposición (Subaditividad Finita)

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ *eventos, entonces:*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Nuevamente, la demostración se hace por inducción en n.

Repitiendo un experimento aleatorio

Consideramos el experimento de arrojar una moneda (equilibrada) con dos resultados: cara (0) y ceca (1), tomando $\Omega = \{0, 1\}$. Entonces

$$P(\{0\}) = P(\{1\}) = 1/2$$

Ahora supongamos que repetimos el experimento de arrojar una moneda (equilibrada) 2 veces. ¿Cuál sería nuestro nuevo espacio muestral?

$$\Omega^2 = \Omega \times \Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

y si lo repetimos n veces, tendríamos el espacio

$$\Omega^n = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \cdots \times \Omega}_{n \text{ veces}} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) : \omega_i \in \Omega \text{ para todo } i\}$$

En este nuevo espacio muestral, todavía podemos asignar probabilidades según la definición de Laplace por ejemplo la probabilidad de obtener la secuencia cara, ceca, cara al tirar 3 veces la moneda es

$$P(\{(1, 0, 1)\}) = 1/8$$

Nuestra primer variable aleatoria

Como veremos más adelante, una variable aleatoria será un número asociado al resultado de un experimento aleatorio. Matemáticamente, una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Por ejemplo, consideramos en el experimento anterior de arrojar n veces la moneda la cantidad S_n que representa el número de caras en n ensayos.

$$S_n(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$$

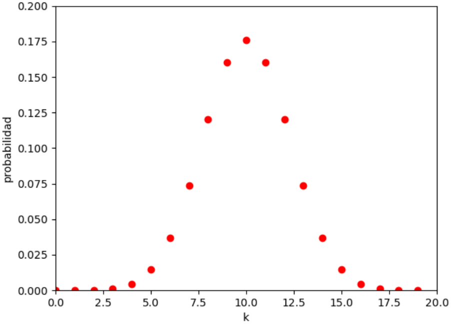
Notamos que S_n toma valores entre 0 y n. Pero ¿cuál es la probabilidad de que S_n tome un determinado valor k?

Notamos que hay $\binom{n}{k}$ formas de obtener k veces cara (y $n-k$ veces ceca). Mientras que nuestro espacio muestral tiene 2^n elementos, así que según la definición de Laplace:

$$P\{S_n = k\} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Esta fórmula nos dice cual es la distribución de S_n. En este caso, obtenemos un caso particular de lo que se conoce como distribución Binomial o distribución de Bernoulli (que veremos más adelante).

Ilustrando este resultado



Dibujamos la distribución de S_n

$$P\{S_n = k\} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

con $n = 20$. Notamos que estos números también forman un vector de probabilidades.

Parte II

Espacios Muestrales Infinitos

Repitiendo el experimento infinitas veces

Ahora como vimos la vez pasada, según la interpretación frecuencial de la probabilidad esperamos que

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}$$

cuando $n \to \infty$ en algún sentido. Ahora para darle sentido a esto, un primer paso sería considerar el experimento de arrojar infinitas veces la moneda. El espacio muestral asociado es

$$\Omega^\infty = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_i, \ldots) : \omega_i \in \Omega, i \in \mathbb{N}\}$$

donde $\Omega = \{0, 1\}$, es decir: cada punto de este espacio muestral es una sucesión infinita de ceros y unos.

Notemos que ahora Ω^∞ ya no es un espacio muestral finito, sino que es infinito no numerable (¡y tiene el mismo cardinal c de los números reales!). Por ello, no podremos asignar probabilidades en él de acuerdo a la definición de Laplace.

Asignando probabilidad a algunos eventos

Sin embargo, sabemos intuitivamente cómo queremos asignar las probabilidades a algunos subconjuntos de Ω^{Ω}: los que depeden sólo de las primeras n tiradas de la moneda.
Si $A = B \times \Omega^{\infty}$ donde $B \subset \Omega^n$ queremos que

$$P(A) = \frac{\#(B)}{2^n}$$

Por ejemplo, si A es el evento "sale una cara y nueve cecas en las primeras 10 tiradas" queremos que

$$P(A) = \frac{10}{2^{10}}$$

(¡Notemos que si un evento se puede escribir así para dos valores distintos de n, los resultados son consistentes!)

Esperando la primera cara

Ahora consideramos una variación del experimento: tiramos la moneda hasta que salga la primera cara y llamamos T al número de veces que necesitamos tirar la moneda hasta que ello ocurra. ¿Cuál es la distribución de T?

Podemos pensar T como otra variable aleatoria definida sobre Ω^∞.

$$T(\omega) = \text{mín}\{i : \omega_i = 1\}$$

$$T((0,0,0,1,0,\ldots)) = 4$$

Convenimos en que $T((0,0,0,\ldots)) = +\infty$.

Y podemos calcular la distribución de T. Porque para que $T_n = k$ necesitamos que las primeras $k-1$ realizaciones del experimento hayan sido cecas, mientras que la k ésima sea cara. Entonces

$$P\{T = k\} = \frac{1}{2^k}$$

Operaciones numerables sobre los conjuntos

En lo sucesivo, vamos a necesitar realizar operaciones numerables entre los conjuntos. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos de un cierto espacio muestral Ω, consideramos su unión

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{\omega \in \Omega : \exists k \text{ tal que } \omega \in A_k\}$$

y su intersección

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \{\omega \in \Omega : \forall k \;:\; \omega \in A_k\}$$

Diremos que P satisface la propiedad de aditividad numerable o que es σ-aditiva si cada vez que $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de eventos disjuntos, su unión es un evento y

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Un salto conceptual...

Volviendo al ejemplo donde arrojamos infinitas veces la moneda, vamos a queremos contestar preguntas como ¿cúal es la probabilidad de que alguna vez salga una cara?. Sería la probabilidad del evento

$$\{\omega \in \Omega^{\infty} : T(\omega) < +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega^{\infty} : T(\omega) = k\}$$

o como suele escribirse en la teoría de probabilidades

$$\{T < +\infty\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{T = k\}$$

Notemos que los eventos $\{T = k\}$ son disjuntos. Entonces, resulta natural postular que P satisface la aditividad numerable y escribir:

$$P\{T < \infty\} = \sum_{k \in \mathbb{N}} P\{T = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

¡Notemos que como ahora estamos en un espacio muestral infinito la probabilidad puede ser cero sin que el evento sea imposible!
¿Pero hay una manera consistente de asignar probabilidades en Ω^{∞} para que esto tenga sentido?. Veremos esto más adelante.

Un ejemplo más complicado

Recordamos que queremos formalizar la ley de los grandes números

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{2}.$$

Entonces por ejemplo queremos contestar preguntas como ¿cuál es la probabilidad de que $\frac{S_n}{n}$ converja a $1/2$? Recordando la definición de límite esto querría decir que

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

y tomando $\varepsilon = \frac{1}{m}$ para que haya numerables valores de ε en juego podemos escribir

$$\left\{ \omega \in \Omega^{\mathbb{N}} : \frac{S_n(\omega)}{n} \to \frac{1}{2} \right\} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{n_0} \bigcap_{n \geq n_0} \left\{ \omega \in \Omega^{\mathbb{N}} : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

Formalizando esta idea: σ-álgebras

Los ejemplos anteriores nos lleva a pensar que vamos a necesitar hacer operaciones de conjuntos numerables (uniones e intersecciones) entre los eventos. Esto motiva la siguiente definición:

Definición

Sea Ω un conjunto (espacio muestral). Una σ-álgebra de partes de Ω, es una colección de partes de Ω con las siguientes propiedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{E}$.
2. *Si A está en $\mathcal{E}$, entonces su complemento $A^c = \Omega - A \in \mathcal{E}$.*
3. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de conjuntos de Ω entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$.*

En lo sucesivo, asumiremos que la clase de los eventos $\mathcal{E}$ es una σ-álgebra. Notamos que por la ley de De Morgan

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$$

luego una σ-álgebra también es cerrada por intersecciones numerables.

Medidas

Definición

Sean Ω un conjunto y $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra. Una medida *sobre $\mathcal{E}$ es una función $\mu : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$. con las siguientes propiedades:*

1. $$\mu(\emptyset) = 0$$
2. *μ es σ-aditiva: Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia disjunta numerable de conjuntos de $\mathcal{E}$, entonces:*
$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

Si además se verifica que $\mu(\Omega) = 1$, μ se denomina una medida de probabilidad *sobre $\mathcal{E}$.*

El marco de Kolmogorov para la teoría de probabilidades

El matemático ruso Andréi Kolmogórov propuso en 1931 el siguiente marco para la teoría moderna de probabilidades, en el que vamos a trabajar:

Definición

Un espacio de probabilidad es una terna $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ *donde*

- Ω *es un conjunto (espacio muestral).*
- $\mathcal{E}$ *es una* σ*-álgebra de partes de* Ω *(la* σ*-álgebra de los eventos).*
- $P : \mathcal{E} \to [0, 1]$ *es una medida de probabilidad sobre* Ω*.*

Kolmogorov propuso modelar cualquier experimento aleatorio mediante un espacio de probabilidad.

Nota: en las guías prácticas se nota $\mathcal{F}$ a la clase de los eventos, en lugar de $\mathcal{E}$. ¡Espero que no los confunda!

Propiedades de “continuidad” de la probabilidad

Proposición (uniones crecientes)

Si tenemos una sucesión infinita creciente de eventos

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots$$

entonces

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(A_k)$$

Proposición (intersecciones decrecientes)

Si tenemos una sucesión infinita decreciente de eventos

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots B_k \supset B_{k+1} \supset \ldots$$

entonces

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \lim_{k \to +\infty} P(B_k)$$

Demostración para el caso de uniones crecientes

Utilizamos el truco de disjuntar los eventos y notamos que como son crecientes:

$$C_k = A_k - \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j = A_k - A_{k-1} \quad \text{poniendo } A_0 = \emptyset$$

Ahora los C_k son disjuntos. Entonces por la σ-aditividad

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \Rightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} [P(A_k) - P(A_{k-1})]$$

Miremos una suma parcial: ¡es una serie telescópica!

$$\sum_{k=1}^{n} [P(A_k) - P(A_{k-1})] = P(A_n) - P(A_0) = P(A_n)$$

deducimos que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Demostración para el caso de intersecciones crecientes

Tomamos complemento $A_k = B_k^c$. Entonces si los B_k eran decrecientes, los (A_k) serán crecientes. Y observamos que por las leyes de De Morgan

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)^c$$

Luego:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \\
&= 1 - \lim_{k\to+\infty} P(A_k) \\
&= \lim_{k\to+\infty} [1 - P(A_k)] \\
&= \lim_{k\to+\infty} P(B_k)
\end{aligned}$$

Observación: Este argumento usa que una probabilidad es siempre finita (Esta propiedad no es válida para medidas que puedan ser infinitas).

σ-subaditividad

Proposición (σ-subaditividad)

Si $(A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una familia numerable de eventos*

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

En particular,

$$si\ P(A_k) = 0\ para\ todo\ k \Rightarrow P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 0.$$

Tomando complemento,

$$si\ P(A_k) = 1\ para\ todo\ k \Rightarrow P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = 1.$$

Demostración

Pongamos

$$D_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

Por la subaditividad finita

$$P(D_n) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

Pero los D_n son crecientes y

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k.$$

Luego al tomar límite cuando $n \to +\infty$ deducimos que

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(D_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Parte III

Medida y Probabilidad

Eligiendo un número real al azar (1)

En esta última clase exploraremos qué relación existe entre el problema de la probabilidad y el de la medida.

Para esto hagámosnos la siguiente pregunta ¿cómo podríamos elegir un número real al azar en el intervalo [0,1]?

Nuestra construcción se basa en el

Principio de encaje de intervalos

Sea

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

una sucesión infinita decreciente de intervalos cerrados en la recta real $\mathbb{R}$ tal que $|I_k| \to 0$ (donde $|I_k|$ denota la longitud del intervalo I_k). Entonces existe un único número real x tal que

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$$

Eligiendo un número real al azar (2)

Una manera natural de hacerlo es la siguiente: volvamos al experimento de arrojar infinitas veces la moneda que modelamos mediante el espacio muestral Ω^∞ de las sucesiones de ceros y unos. Y supongamos que tenemos una realización $\omega \in \Omega^\infty$ de este experimento que corresponde a una sucesión infinita de ceros y unos.

Le asociaremos un punto $X(\omega) \in [0,1]$ mediante un proceso infinito consistente en construir un encaje de intervalos cerrados

$$I_0 = [0,1] \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

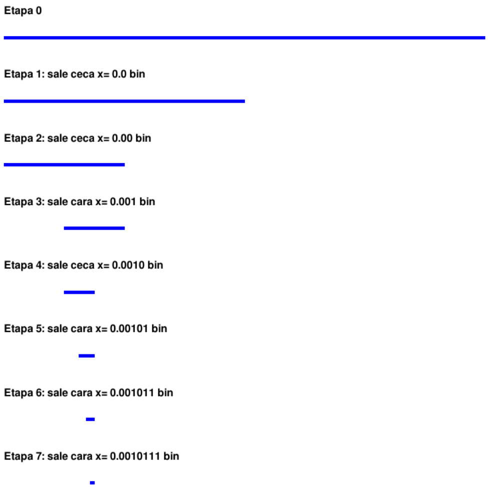
En cada paso, para construir I_k subdividimos I_{k-1} en mitades iguales, y elegimos I_k como la mitad de la izquierda si $\omega_k = 0$ (sale ceca), o la de la derecha $\omega_k = 1$ (sale cara) en la k-ésima realización del experimento.

Por el principio de encaje de intervalos existe un único número real

$$X(\omega) \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$$

Así pues: a cada realización de nuestro experimento aleatorio le corresponde un número real.¡ $X : \Omega^\infty \to [0,1]$ es otro ejemplo de una variable aleatoria!

Un ejemplo de este experimento



Eligiendo un número real al azar (3)

Otra menera de pensar esta construcción es la siguiente: los resultados sucesivos ω_k obtenidos al arrojar la moneda, determinan los dígitos binarios del número $X(\omega)$ de modo que

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2^k}$$

Los que son los que intervienen en nuestra construcción son de la forma

$$I = \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right] \quad 0 \leq j \leq 2^k - 1$$

Se llaman intervalos diádicos de la etapa k.
Notemos entonces que el evento $\{X(\omega) \in I\}$ sólo depende de las k primeras tiradas de la moneda, luego sabemos que probabilidad asignarle al evento $\{X(\omega) \in I\}$. Tenemos:

$$P\{X(\omega) \in I\} = \frac{1}{2^k} = |I|$$

si I es cualquier intervalo diádico de la etapa k. Esto dice que X tiene distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

σ-álgebra generada. Conjuntos borelianos

Problema: Los intervalos no forman una σ-álgebra. Solución: podemos trabajar en la σ-álgebra generada ...

Definición

Sea Ω un espacio muestral y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una colección de subconjuntos de Ω cualquiera. La σ-álgebra generada por $\mathcal{C}$ se define como la menor σ-álgebra que contiene a la colección $\mathcal{C}$. La notamos $\sigma(\mathcal{C})$. Existe porque

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{A}} \{\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{A} \text{ es una sigma álgebra } \}$$

(ya que la intersección arbitraria de una famila de σ-álgebras es una σ-álgebra)

Definición

Tomemos $\Omega = [0,1]$ y $\mathcal{C} = \{I \subset [0,1] : I \text{ es un intervalo } \}$, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ se llama la σ-álgebra de Borel del $[0,1]$ y sus elementos se denominan conjuntos borelianos.

La medida de Lebesgue y la asignación de probabilidades

Vemos que existe una íntima relación entre asignar probabilidades a subconjuntos de Ω^∞ y asignar medida a subconjuntos del intervalo $[0,1]$. ¡Son problemas equivalentes!

En análisis real se prueba el siguiente teorema fundamental, que dice que la medida de intervalos en $[0,1]$ puede extenderse a una medida (σ-aditiva) definida sobre una σ-álgebra:

Teorema (Existencia de la medida de Lebesgue)

Existe una única medida de probabilidad $m : \mathcal{B} \to [0,1]$ *definida en* $\mathcal{B}$*, tal que*

$$m(I) = |I|$$

para cualquier intervalo $I \subset [0,1]$.

Si aceptamos este teorema, podemos formalizar la asignación de probabilidades en Ω^∞, usando nuestra variable aleatoria $X : \Omega^\infty \to [0,1]$ para "copiar" la medida definimos

$$\mathcal{E} = \{A \subset \Omega^\infty : X(A) \in \mathcal{B}\}$$

$P(A) = m(X(A))$ para $A \in \mathcal{E}$ de modo que $P\{X \in B\} = m(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$

Un ejemplo

Preguntémosos: ¿cuál es la probabilidad de que $X(\omega)$ sea racional? Por la construcción anterior es equivalente a calcular la medida de Lebesgue del conjunto de los números racionales.

Pero los números racionales son numerables. Podemos ponerlos en una sucesión infinita

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$$

Luego el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales puede escribirse como

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{q_n\}$$

Pero

$$m(\{q_n\}) = m([q_n, q_n]) = 0$$

y entonces como la medida de Lebesgue es σ-aditiva:

$$m(\mathbb{Q}) = 0 \Rightarrow P(\{X(\omega) \in \mathbb{Q}\}) = 0$$

Lo mismo pasaría si reemplazáramos $\mathbb{Q}$ por cualquier otro subconjunto numerable de $[0, 1]$.

Epílogo

Vimos que la teoría moderna de probabilidades basada en el marco de Kolmogorov está estrechamente ligada a la noción de medida que se ve en los cursos de Análisis Real- Medida y Probabilidad.

Como no es el tema del curso, intentaremos en lo posible no meternos muy a fondo con los tecnicismos de la teoría de Lebesgue, y aceptaremos como válidos algunos resultados (como la existencia de la medida de Lebesgue).

Para los interesados en profundizar en este punto de vista les recomiento el libro de Patrick Billingsley titulado Probability and Measure (o después de cursar anális real, cursar la optativa Teoría de probabilidades).