Introducción a la Materia

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Probabilidades y Estadística para Matemática
Segundo cuatrimestre de 2021

Experimentos Aleatorios

- La teoría de probabilidades trata con experimentos aleatorios, es decir con experimentos cuyo resultado no resulta posible prever de antemano.
- Denominamos espacio muestral al conjunto de los posibles resultados de un experimento aleatorio, y lo simbolizamos con la letra Ω.
- Históricamente, la teoría de probabilidades se desarrolló para estudiar los juegos de azar, pero posteriormente encontró otras innumerables aplicaciones.
- En las aplicaciones a los juegos de azar, el espacio muestral es usualmente finito. Algunos ejemplos:
  - Se arroja una moneda. Hay dos resultados posibles:
$$\Omega = \{cara, ceca\}$$
  - Se arroja un dado. Hay seis resultados posibles:
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplos de experimentos aleatorios (2)

Sin embargo, en otras aplicaciones del cálculo de probabilidades, aparecen espacios muestrales de naturaleza más compleja. Veamos algunos ejemplos:

- Se elije un individuo al azar de una población humana y se mide su altura. El resultado es un número real positivo (dentro de un cierto rango). Podemos por lo tanto pensar que el espacio muestral Ω es un intervalo de la recta real.
- Se observa la trayectoria de una partícula que se mueve sobre la superficie de un líquido siguiendo una trayectoria de apariencia caótica durante un cierto intervalo de tiempo $[0, T]$ (movimiento Browniano). En este caso, cada posible resultado del experimento es una curva continua. Por ello el espacio muestral podría tomarse como el espacio de funciones continuas $C([0, T], \mathbb{R}^2)$.

Eventos

- Un evento o suceso es algo que puede ocurrir o no ocurrir en cada realización del experimento aleatorio. Los eventos corresponden a subconjuntos del espacio muestral.

  Por ejemplo: si el experimento consiste en arrojar un dado, el evento "sale un número par" está representado por el subconjunto $A = \{2, 4, 6\}$ del espacio muestral.

- La idea básica del cálculo de probabilidades será asignar a cada evento $A \subset \Omega$, un número real entre 0 y 1 que llamaremos su probabilidad y simbolizaremos por $P(A)$. Este número medirá qué tan probable es que ocurra el evento A.

La definición clásica de Laplace

El matemático francés Pierre-Simon Laplace (1749–1827) propuso la siguiente definición del concepto de probabilidad: consideremos un experimento aleatorio que tiene un número finito de resultados posibles

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$$

y supongamos que dichos resultados son equiprobables (es decir que consideramos que cada uno de ellos tiene las mismas chances de ocurrir o no que los demás), entonces la probabilidad de un evento $A \subset \Omega$ se define por

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)}$$

La definición clásica de Laplace: Un ejemplo

Por ejemplo, supongamos que nos preguntamos ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par al arrojar un dado?. En este caso hay 6 casos posibles, que corresponden a los elementos del espacio muestral

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y 3 casos favorable, que corresponden a los elementos del evento

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Si suponemos que el dado no está cargado (de modo que asumimos que los seis resultados posibles del experimento son equiprobables), entonces

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

¿Cuál es el significado intuitivo de esta probabilidad?. Intuitivamente, esperamos que si repetimos el experimento muchas veces, observemos que aproximadamente la mitad de las veces sale un número par (y la otra mitad de las veces sale un número impar).

Una observación filosófica

- Notemos que el aparente azar en este ejemplo del dado, se debe en realidad a nuestra ignorancia. Porque la mecánica clásica (Newtoniana) nos dice que el movimiento del dado es en realidad un proceso completamente determinístico (no aleatorio). Y si conociéramos la posición y velocidad iniciales y las fuerzas que actúan, podríamos calcular (en principio) en forma exacta, cómo se va a mover el dado.

- Un tipo diferente de azar, mucho más fundamental, aparece en la mecánica cuántica, una de las teorías fundamentales de la física moderna. Esta teoría postula que el azar es un componente esencial e irreductible de la naturaleza a nivel microscópico. Así por ejemplo, no podemos predecir con exactitud donde vamos a encontrar un electrón, sino solamente calcular la probabilidad de que el electrón esté en una cierta región del espacio.

Propiedades de la Probabilidad

Notemos algunas propiedades de la noción de probabilidad, introducida por la definición de Laplace:

- La probabilidad de un evento es un número real entre 0 y 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad de un evento imposible es 0:

$$P(\emptyset) = 0$$

mientras que la probabilidad de un evento que ocurre siempre es 1:

$$P(\Omega) = 1$$

Por ejemplo; al tirar un dado, la probabilidad de sacar un 7 es cero mientras que la probabilidad de sacar un número menor que 10 es uno (Los eventos imposibles corresponden como conjuntos al conjunto vacío, y los que ocurren siempre corresponden a todo el espacio muestral Ω).

Notemos que para el concepto de probabilidad introducido por la definición clásica de Laplace, es cierta la recíproca de esta afirmación: si $P(A) = 0$, el suceso A es imposible, mientras que si $P(A) = 1$ el suceso ocurre siempre. Sin embargo, esto no será cierto para otras extensiones del concepto de probabilidad que introduciremos más adelante.

- Aditividad: Si A y B son dos eventos que no pueden ocurrir simultáneamente, entonces la probabilidad de que ocurra A u ocurra B (lo que corresponde como conjunto a $A \cup B$), es cero

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Ejemplo: En el experimento de arrojar un dado, consideramos $A = \{2, 4\}$ y $B = \{1, 3\}$. Entonces $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. $P(A) = P(B) = 2/6 = 1/3$, $P(A \cup B) = 4/6 = 2/3 = 1/3 + 1/3$.

La interpretación frecuencial de la probabilidad

Supongamos que tenemos un evento A en un espacio muestral Ω y que tiene una cierta probabilidad $p = P(A)$.

Repetimos nuestro experimento aleatorio muchas veces, y designamos por f_n a la frecuencia de éxitos en las primeras n realizaciones de nuestro experimento. Es decir:

$$f_n = \frac{\text{número de éxitos en las primeras n repeticiones}}{n}$$

Intuitivamente, esperamos que f_n aproxime a la probabilidad $P(A)$ cuando n es grande. Matemáticamente nos gustaría poder decir que

$$f_n \to p \text{ cuando } n \to \infty$$

en algún sentido.

Este enunciado se conoce como ley de los grandes números y toda la teoría del cálculo de probabilidades surgió del intento de formalizarlo como un teorema matemático (como veremos más adelante).

Simulación

Consideramos nuevamente el evento: 'sacar un número par´´ al arrojar un dado. Como no me voy a poner a tirar un dado muchas veces en cámara y calcular las frecuencias f_n, voy a simular este experimento utilizando la computadora.

Programa para simular un dado en Python 3

```
import numpy as np
cuantas_veces=10000
exitos=0
# np.random.seed(1)
for n in range(1,cuantas_veces+1):
        dado= np.random.randint(1, 7)
        es_par = (dado==2) or  (dado==4) or (dado==6)
        if es_par:
                exitos +=1
        frecuencia= exitos/n
        if n%1000==0:
                print (n,frecuencia)
```

Probabilidades en la vida real $\Rightarrow$ Estadística

Consideremos una aplicación de las probabilidades con la que seguramente están familiarizados: las encuestas electorales.

Supongamos para simplificar que tenemos una elección presidencial con varios candidatos y queremos saber que probabilidad $P(A)$ tiene un determinado candidato A de ganar la elección.

Podemos pensar al conjunto de electores Ω como un espacio muestral. Nuestro experimento aleatorio consistirá en elegir un elector al azar en esta población y preguntarle por quien vota (¡supongamos que no miente!).

Pero usualmente Ω es un conjunto muy grande, y sería muy costoso preguntárselo a todos los electores. Entonces para estimar $P(A)$ se suele proceder así: se elije una muestra aleatoria de la población (de un cierto tamaño n) y se estima $P(A)$ por la frecuencia observada en la muestra.

$$f_n = \frac{\text{cantidad de éxitos en la muestra}}{n}$$

donde "éxito´' en este ejemplo sería que la persona vote por el candidato A.

Algunas preguntas clave de la estadística

En este ejemplo, surgen naturalmente algunas preguntas:

- ¿Cómo elegir el tamaño de la muestra?
- ¿Qué tan confiable es el resultado de la encuesta?

Notemos que estas preguntas están relacionadas: cuanto más grande sea el tamaño n de la muestra, más confiable será el resultado de la encuesta. Pero también más costosa será la encuesta.

Como veremos más adelante, la teoría de la estadística matemática nos proporciona herramientas para responder estas preguntan.

Limitaciones de la definición de Laplace

La definición clásica de Laplace, aunque tiene un claro significado intuitivo presenta algunas limitaciones.

- En primer lugar, su aplicación está limitada a problemas donde el espacio muestral es finito. Sin embargo como hemos mencionado al comienzo, en muchas aplicaciones importantes del cálculo de probabilidades, nos encontramos con espacios muestrales que no lo son.
- Por otra parte, la definición clásica de Laplace hace la suposición de que los posibles resultados del experimento aleatorio (los puntos del espacio muestral) son equiprobables, pero es fácil imaginar experimentos en los que esta suposición no se verifica, por ejemplo si arrojamos un dado que no está equilibrado ("está cargado").

Por ello, utilizaremos como punto de partida una definición de probabilidad axiomática (más general). Ello lo analizaremos en la próxima clase.