Una Prueba de la Fórmula de Inversión para la Transformada de Fourier

21 de junio de 2006

La fórmula de inversión para la transformada de Fouier, afirma que es posible reconstruir una función f a partir de su transformada:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx$$

del siguiente modo:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{ix\omega}d\omega$$

Estas fórmulas tienen sentido si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Hasta ahora solamente hemos dado un argumneto heurístico para justificar la validez de la fórmula de inversión. Nos preguntamos ahora bajo qué hipótesis y en qué sentido es válida dicha fórmula.

Veremos en primer lugar que la integral que aparece en la fórmula de inversión debe interpretarse siempre como un valor principal, es decir:

$$f(x_0) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{f}(\omega)e^{ix_0\omega}d\omega \tag{1}$$

Llamemos

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \hat{f}(\omega)e^{ix_0\omega}d\omega$$

a las integrales parciales que aparecen en dicha fórmula. Vamos a probar que si f es derivable en el punto x_0 entonces la fórmula de inversión (1) es válida.

Utilizando la definición de la transformada, podemos escribir:

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx\right]e^{ix_0\omega}d\omega$$

En esta integral, podemos cambiar el orden de integración[1]

[1] Esto puede justificarse utilizando la convergencia uniforme de la integral que define la transformada de Fourier respecto al parámetro ω, pues $f \in L^1(\mathbb{R})$.

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\int_{-R}^{R} e^{i(x_0-x)\omega} d\omega\right] dx$$

La integral interior podemos calcularla explícitamente:

$$\int_{-R}^{R} e^{i(x_0-x)\omega} d\omega = 2\frac{\sin(R(x_0-x)}{x_0-x}$$

Por lo que obtenemos la representación integral:

$$I(R) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin(R(x_0-x)}{x_0-x} dx$$

La función

$$D_R(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin \mathrm{Rx}}{x}$$

que aparece en esta fórmula recibe el nombre de **núcleo de Dirichlet**. Pordemos interpretar esta fórmula como una convolución con el núcleo de Dirichlet:

$$I(R) = (f * I_R)(x_0)$$

Nuestro objetivo es probar que si f es derivable en x_0, entonces $I(R) \to f(x_0)$ conforme $R \to +\infty$.

Una propiedad importante del núcleo de Dirichlet, es que tiene integral 1[2]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \mathrm{Rx}}{x} dx = 1 \tag{2}$$

Utilizando esta propiedad podemos escribir:

$$f(x_0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\,\frac{\sin(R(x_0-x))}{x_0-x} dx$$

y en consecuencia:

$$I(R) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x_0)]\,\frac{\sin(R(x_0-x)}{x_0-x} dx \tag{3}$$

Nuestro objetivo será probar que si f es derivable en $x_0$entonces esta integral tiende a cero cuando $R \to +\infty$.

Para poder hacer esto, necesitamos un lema que será de fundamental importancia:

Lema 0.1 *[Lema de Riemman-Lebesgue] Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *entonces* $\hat{f}(\omega) \to 0$ *cuando* $|\omega| \to +\infty$.

[2]Haciendo el cambio de variable $y = Rx$ podemos reducirlo al caso $R = 1$, que hemos calculado anteriormente usando variable compleja.

Demostración: La idea de la prueba del lema de Riemman-Lebesgue, consiste en probarlo primero para funciones "suficientemente buenas" . Después es posible probarlo para cualquier $f \in L^1$ por medio de un argumento de aproximación.

Más específicamente: Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que f es de clase C^1, $f' \in L^1$ y f es acotada. Entonces podemos integrar por partes:

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{-ix\omega}dx = \int_{-R}^{R} f(x)\left(\frac{e^{-ix\omega}}{(-i\omega)}\right)' dx = f(x)\left(\frac{e^{-ix\omega}}{(-i\omega)}\right)\Big|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(x)\left(\frac{e^{-ix\omega}}{(-i\omega)}\right) dx$$

Cuando $R \to$ ' $+\infty$, obtenemos que:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\omega}dx = \frac{1}{i\omega}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\omega}dx$$

En consecuencia:

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{|\omega|}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx = \frac{1}{|\omega|}\,\|f\|_{L^1}$$

por lo que $\hat{f}(\omega) \to 0$ cuando $|\omega| \to +\infty$.

Para una función $f \in L^1(\mathbb{R})$ cualquiera, se procede mediante un argumento de aproximación: dado $\varepsilon > 0$, encontramos una función "buena" (esto es que verifique las hipótesis anteriores g acotada, de clase C^1,y $g' \in L^1$) y tales que f y g estén a distancia menor que ε, en el sentido de la distancia del espacio L^1:

$$\|f - g\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Entonces,

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)||e^{-ix\omega}|dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon$$

Como $\hat{g}(\omega) \to 0$ cuando $|\omega| \to +\infty$, porque ya probamos el teorema para funciones "buenas"; concluimos que $\hat{f}(\omega) \to 0$ cuando $|\omega| \to \infty$.

Separando la parte real e imaginaria, obtenemos el siguiente corolario:

Corollary 0.2 *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\cos\omega x\,dx \to 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx \to 0$$

cuando $|\omega| \to \infty$.

Volviendo a la prueba de la fórmula de inversión, recordamos que nuestro objetivo es ahora probar que la integral en (3) tiende a cero cuando $R \to +\infty$.

Haciendo el cambio de variables $h = x - x_0$ podemos escribir esta fórmula del siguiente modo:

$$I(R) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx$$

La idea va a ser separar en esta integral los puntos que están cerca de x_0 y los que están lejos. Dado $M > 0$ (que vamos a elegir después) partimos la integral del siguiente modo:

$$I(R) - f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{|h| \leq M} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx$$

Comencemos por la integral en el segundo término: podemos escribir

$$\frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx = \frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} f(x_0 + h) \frac{\sin(Rh)}{h} dh - \frac{f(x_0)}{h} \frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} \frac{\sin(Rh)}{h} dh$$

donde la integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} \frac{\sin(Rh)}{h} dh = \frac{1}{\pi} \int_{|u| > RM} \frac{\sin(u)}{u} du$$

tiende a cero cuando $M \to +\infty$(uniformemente en $R > 1$) por ser la cola de la integral convergente dada por (2), y la integral

$$\frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} f(x_0 + h) \frac{\sin(Rh)}{h} dh$$

también es finita y tiende a cero (uniformemente en R) cuando $M \to \infty$por ser:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} f(x_0 + h) \frac{\sin(Rh)}{h} dh \right| \leq \frac{1}{\pi M} \int_{|h| > M} |f(x_0 + h)| dh \leq \frac{1}{\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$$

y $f \in L^1(\mathbb{R})$.

En consecuencia, dado $\varepsilon > 0$ eligiendo M suficientemente grande, tendremos que:

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|h| > M} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx \right| < \varepsilon$$

(para todo R >1). Una vez fijado el M, sólo nos falta ver que

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{|h| \leq M} [f(x_0 + h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx \right| < \varepsilon$$

si R es suficientemente grande. Para ello utilizamos el lema de Riemman Lebesgue: afirmamos que si f es derivable en x_0, la función g definida por

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} & \text{si} \quad |h| \leq M \\ 0 & \text{si} \quad |h| > M \end{cases}$$

está en L^1. En efecto: como supusimos que f es derivable en x_0 , g será acotada en $|h| < \delta$(para todo δ suficientemente pequeño) y escrribiendo que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(h)|dh = \int_{\delta<|h|\leq M} |g(h)|dx + \int_{|h|<\delta} |g(h)|dx$$

vemos que la integral de $|g|$ es finita.

Concluimos que es posible aplicar el lema de Riemman-Lebesgue a g y deducir que:

$$\frac{1}{\pi} \int_{|h|\leq M} [f(x_0+h) - f(x_0)] \frac{\sin(Rh)}{h} dx \to 0$$

conforme $R \to +\infty$. En consecuencia concluimos que:

$$\lim_{R\to+\infty} I(R) = f(x_0)$$

si f es derivable en x_0. Esto concluye la prueba de la fórmula de inversión.