Ejemplos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales usando la Transformada de Fourier

Pablo De Nápoli

Versión Previa 0.1

1. La ecuación de Laplace

Consideramos el siguiente problema: encontrar una función $u = u(x, y)$ que sea armónica (esto es: que resuelva la ecuación de Laplace, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$) en el semiplano

$$\mathbb{R}^{\nvDash}_{+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{\nvDash} : y > 0\}$$

y que tome valores prefijados en la frontera:

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Este problema se conoce como **Problema de Dirichlet** para la ecuación de Laplace en un semiplano.

Para resolver esta ecuación, consideramos la transformada de Fourier de la función u en la variable x, es decir:

$$\hat{u}(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{-ix\omega} dx$$

Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier[1], podemos transformar las derivadas de u que aparecen en la ecuación diferencial: las derivadas en la variable x se transforman en una multiplicación

$$\widehat{u_{xx}}(\omega, y) = (i\omega)^2 \hat{u}(\omega, y) = -\omega^2 \hat{u}(\omega, y)$$

mientras que derivando bajo el signo de integral, obtenemos que:

$$\widehat{u_{yy}}(\omega, y) = (\hat{u})_{tt}(\omega, y)$$

(Como no estamos transformando en la variable t, las derivadas respecto a t conmutan con la transformada de Fourier). La ecuación transformada queda:

[1] Haremos la hipótesis provisional de que la función incógnita u sea la suficientemente buena, como para que todas las manipulaciones formales que realizaremos sean correctas.

$$-\omega^2\hat{u}(\omega,y)+(\hat{u})_{tt}(\omega,y)=0$$

Esta es una ecuación ordinaria, ya que solo aparecen las derivadas respecto a la variable y de la función incógnita $\hat{u}$ (ω sólo interviene como un parámetro). Podemos expresar la solución general de esta ecuación de la siguiente forma:

$$\hat{u}(\omega,y)=c_1(\omega)e^{-\omega y}+c_2(\omega)e^{\omega y}$$

donde las constantes c_1, c_2 serán funciones del parámetro ω.

Recordemos que según el lema de Riemman-Lebesgue, la transformada de Fourier de cualquier función integrable tiende a cero cuando $|\omega| \to +\infty$. En consecuencia, para que $\hat{u}(\omega,y) \to 0$ cuando $\omega \to +\infty$ resulta razonable suponer que $\hat{u}$ es de la siguiente forma:

$$\hat{u}(\omega,y)=\begin{cases} c_1(\omega)e^{-\omega y} & \text{si} \quad \omega>0 \\ c_2(\omega)e^{\omega y} & \text{si} \quad \omega<0 \end{cases}$$

Podemos expresar esto en una sóla fórmula de la siguiente manera:

$$\hat{u}(\omega,y)=c(\omega)e^{-y|\omega|}$$

Podemos determinar la función $c(\omega)$ utilizando la condición de contorno: $u(x,0)=u_0(x)$. De hecho como estamos transformando en la variable x, debemos tener:

$$\hat{u}(x,0)=\hat{u_0}(x)$$

y en consecuencia: $c(\omega)=\hat{u}_0(x)$. Por lo que podemos expresar la transformada de la solución de la siguiente manera:

$$\hat{u}(\omega,y)=\hat{u_0}(\omega)e^{-y|\omega|}$$

Nuestro objetivo será ahora anti-transformar esta expresión, para obtener la solución u buscada.

Para anti-transformar un producto recordamos que la transformada de Fourier transforma la convolución en producto:

$$\widehat{f*g}(\omega)=\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$$

En nuestro caso, la solución se extresará entonces, en la forma de una convolución entre el dato inicial u_0y una función $P_y$que queremos encontrar tal que:

$$\widehat{P_y}(\omega,y)=e^{-y|\omega|} \tag{1}$$

del siguiente modo:

$$u(x,y)=(u_0*P_y)(x) \tag{2}$$

Para encontrar la función P_y, recurrimos a la tabla de transformadas de Fourier, donde leemos que:

$$\widehat{\frac{1}{1+x^2}} = \pi e^{-|\omega|}$$

La función que queremos anti-transformar $e^{-|\omega|y}$ es muy similar a esta función salvo por una dilatación (cámbio de escala). Por ello, nos será útil analizar como cambia la transformada de Fourier cuando cambiamos la escala:

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ y notemos $f_a(x) = f(\frac{x}{a})$ donde $a > 0$. Entonces

$$\widehat{f_a}(\omega) = a\,\hat{f}a(\omega)$$

Demostración: Por definición de la transformada,

$$\widehat{f_a}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{a}\right) e^{-ix\omega} dx$$

y haciendo el cámbio de variable $u = x/a$

$$\widehat{f_a}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(u\right) e^{-iua\omega} a\,du = \widehat{f_a}(\omega) = a\,\hat{f}a(\omega)$$

Aplicando este lema a la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, obtenemos que:

$$\widehat{\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \pi e^{-a|\omega|}$$

o (utilizando la linealidad de la transformada):

$$\frac{1}{\pi}\widehat{\frac{a}{a^2+x^2}} = e^{-a|\omega|}$$

Volviendo a la ecuación (1), y cambiando a por y vemos que esta es exactamente la función P_y que estábamos buscando:

$$P_y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}$$

Esta función se conoce en la literatura matemática como el **núcleo de Poisson**. Entonces volviendo a la ecuación (2) podemos escribir explícitamente la solución obtenida como una integral:

$$u(x,y) = (u_0 * P_y)(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(z)\frac{y}{y^2+(x-z)^2}dz$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de Poisson para la solución del problema de Dirichlet en un semiplano. También podemos expresar esta integral como:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x-w)\frac{y}{y^2+w^2}dw$$

(Haciendo un cambio de variable de la forma $w = x - z$, o recordando que la convolución es conmutativa).

Notemos sin embargo, que tal como lo hemos planteado el problema de Dirichlet no posee solución única. De hecho, si u es una solución, cualquier otra función de la forma $u(x,y) + cy$ para alguna constante c será también una solución.

Lo que sucede es que se trata de un problema en una región no acotada y para tener unicidad deberíamos imponer alguna condición de frontera "en el infinito", por ej. es fácil ver que la solución dada por la fórmula de Poisson (si $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$) verifica que

$$u(x,y) \to 0 \text{ cuando } y \to +\infty$$

2. La ecuación de Ondas

(Falta escribir esta parte)