Notas de Análisis Real
(versión 2019.1)

©2007-2019 Pablo L. De Nápoli

5 de julio de 2019

Índice general

Capítulo 1

Teoría de la medida en $\mathbb{R}^d$

En este capítulo, desarrollaremos la teoría de la medida de Lebesgue en el espacio euclídeo d-dimensional[1]

$$\mathbb{R}^d = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \dots, d\}$$

Nuestro objetivo es asignarle a cada conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ (de una cierta clase que vamos a definir, que llamaremos la clase de los conjuntos medibles), un número $m(A)$ (su medida de Lebesgue) que generalizará las nociones intuitivas de longitud (en $d = 1$), área (en $d = 2$) y volumen ($d = 3$).

Realizaremos esta construcción en varias etapas, extendiendo la noción de medida a clases cada vez más generales de conjuntos, comenzando por los intervalos.

Existen dos notaciones usuales para la medida de un conjunto $m(E)$ o $|E|$, que usaremos indistintamente. La primera de ellas tiene la ventaja de hacer claro que la medida es una función que se aplica a conjuntos (en una clase determinada).

Nota sobre la bibliografía: La presentación que he elegido sigue esencialmente mis notas del curso del profesor N. Fava, con quien yo cursé la materia, por lo que una referencia recomendada es el libro de N. Fava y F. Zó [FZ96]. El principal mérito de esta construcción, en contraste con el de otras presentaciones más abstractas de la teoría, es el de tener un claro significado geométrico, por lo que creo que es más fácil de comprender para los estudiantes. El clásico libro de Wheeden y Zygmund [WZ77] presenta una construcción similar, quizás algo más directa (aunque omite algunos detalles).

1.1. Intervalos en la recta:

Definición 1.1.1 *Los intervalos de la recta real $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$ son los conjuntos de los cuatro tipos siguientes:*

[1] Reservaremos en lo sucesivo la letra d para la dimensión del espacio.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

siendo a, b números reales con $a \leq b$. En cualquier caso la medida *de un intervalo I se define por: $m(I) = b - a$*

Propiedades de los intervalos de la recta

1. El conjunto vacío es un intervalo: $\emptyset = (a, a)$
2. La intersección de dos intervalos es un intervalo[2].
3. La diferencia de dos intervalos I_1 y I_2 se puede escribir como unión de dos intervalos J_1 y J_2 disjuntos:

   $$I_1 - I_2 = J_1 \cup J_2 \text{ con } J_1 \cap J_2 = \emptyset$$

4. La única manera de escribir un intervalo como unión de k intervalos disjuntos consiste en elegir k puntos interiores de subdivisión (esto es: una partición del intervalo).
5. **Consecuencia:** (Aditividad de la medida) Si un intervalo se escribe como unión finita de intervalos disjuntos

   $$I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$$

   entonces
   $$m(I) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_k)$$

1.2. Intervalos en $\mathbb{R}^d$

Definición 1.2.1 *Un intervalo en $\mathbb{R}^d$ es el producto cartesiano de d intervalos lineales:*

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d = \{x \in \mathbb{R}^d : x_j \in I_j \ (1 \leq j \leq d)\}$$

donde los I_j son intervalos de $\mathbb{R}$. Si todos los I_j son cerrados, I es un intervalo cerrado. Si todos los I_j son abiertos, I es un intervalo abierto.

[2]Para que esto sea cierto sin excepciones es necesario considerar al conjunto vacío como un intervalo.

Observación: La representación de un intervalo en $\mathbb{R}^d$ como producto cartesiano de intervalos lineales es única (salvo para el intervalo vacío).

Propiedad 1.2.2 *La intersección de dos intervalos de $\mathbb{R}^d$ es un intervalo de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración: Sean I, J intervalos de $\mathbb{R}^d$ entonces se escriben como producto cartesiano de d intervalos lineales:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$$
$$J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_d$$

entonces:

$$I \cap J = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2) \times \ldots \times (I_d \cap J_d)$$

Como $I_1 \cap J_1, I_2 \cap J_2, \ldots, I_d \cap J_d$ son intervalos de la recta, $I \cap J$ es un intervalo en $\mathbb{R}^d$. $\square$

1.3. Conjuntos Elementales

Definición 1.3.1 *Un* **conjunto elemental** *es un conjunto que puede representarse como unión de un número finito de intervalos disjuntos:*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

donde los I_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$.

Propiedad 1.3.2 *Si A y B son conjuntos elementales, también lo es $A \cap B$.*

Demostración: Sean A, B conjuntos elementales

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

donde los I_k son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$$

donde los J_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$. Entonces:

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (I_i \cap J_j)$$

y los conjuntos $I_i \cap J_j$ son intervalos disjuntos $\Rightarrow A \cap B$ es un conjunto elemental. $\square$

Corolario 1.3.3 *La intersección de cualquier familia finita de conjuntos elementales es un conjunto elemental.*

Propiedad 1.3.4 *Si A y B son conjuntos elementales disjuntos entonces $A \cup B$ es elemental. (Es una consecuencia obvia de la definición.)*

Propiedad 1.3.5 *Si A es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{d_1}$ y B es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{d_2}$ entonces $A \times B$ es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$.*

Demostración: Sean:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

donde los I_k son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^{d_1}$

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$$

donde los J_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^{d_2}$. Entonces:

$$A \times B = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{m} (I_i \times J_j)$$

Además la unión es disjunta, y $I_i \times J_j$ es un intervalo de $\mathbb{R}^{d_1+d_2} \Rightarrow A \times B$ es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$. □

Propiedad 1.3.6 *Si I y J son intervalos de $\mathbb{R}^d$, entonces $I - J$ es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^d$.*

Demostración: Hacemos inducción en la dimensión d. Para $d = 1$ (en la recta) vale. Si $d > 1$ y suponemos que vale en $\mathbb{R}^{d-1}$, sean:

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$$

$$J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_d$$

donde I_i, J_i son intervalos de $\mathbb{R}$. Podemos escribir esto como

$$I = I_1 \times I', J = J_1 \times J'$$

donde

$$I' = I_2 \times I_3 \times \ldots \times I_{d-1}$$

$$J' = J_2 \times J_3 \times \ldots \times J_{d-1}$$

son intervalos en $\mathbb{R}^{d-1}$. Tenemos que:

$$I - J = [(I_1 - J_1) \times I'] \cup [(I_1 \cap J_1) \times (I' - J')]$$

donde

$$[(I_1 - J_1) \times I'] \cap [(I_1 \cap J_1) \times (I' - J')] = \emptyset$$

Por la hipótesis inductiva, $I' - J'$ es un conjunto elemental de $\mathbb{R}^{d-1}$, y $I_1 \cap J_1$ es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces $(I_1 \cap J_1) \times (I' - J')$ es elemental (por la propiedad 1.3.5). Por otra parte $I_1 - J_1$ es unión de dos intervalos de la recta. Por la propiead 1.3.5, $(I_1 - J_1) \times I'$ es elemental $\Rightarrow I - J$ es elemental (por la propiedad 1.3.4). □

Propiedad 1.3.7 *Si A y B son conjuntos elementales, entonces $A - B$ es elemental.*

Demostración: Sean

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

donde los I_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$, y

$$B = \bigcup_{j=1}^{m} J_j$$

donde los J_j son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$. Entonces:

$$A - B = \bigcup_{i=1}^{n} (I_i - B)$$

siendo la unión disjunta, y por la ley de De Morgan, tenemos que:

$$I_i - B = \bigcap_{j=1}^{m} (I_i - J_j)$$

Cada $I_i - J_j$ es elemental (por la propiedad 1.3.7), por lo tanto $I_i - B$ es elemental para cada i (por la propiead 1.3.2), y en consecuencia, $A - B$ es así mismo elemental (por la propiedad 1.3.4). □

Propiedad 1.3.8 *Si A y B son conjuntos elementales, entonces $A \cup B$ es elemental.*

Demostración: $A \cup B = A \cup (B - A)$ siendo la unión disjunta. Por la propiedad 1.3.7 $A - B$ es elemental. En consecuencia, $A \cup B$ es elemental (por la propiedad 1.3.4). □

Resumen: Si A y B son conjuntos elementales entonces también lo son $A \cap B$, $A \cup B$ y $A - B$

Observación 1.3.9 *La diferencia simétrica de conjuntos elementales es elemental:*

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Si consideramos la clase $\mathcal{E}$ de los conjuntos elementales con Δ como suma y $\cap$ como producto $(\mathcal{E}, \Delta, \cap)$ es un anillo (en el sentido del álgebra). Se dice que los conjuntos elementales forman un **anillo de conjuntos**. *El conjunto vacío es el cero de este anillo. El inverso aditivo de A es A ya que $A \Delta A = \emptyset$.*

Observación 1.3.10 *Un conjunto elemental es acotado (es unión finita de conjuntos acotados). Por lo tanto el complemento de un conjunto elemental no puede ser elemental (sino el espacio $\mathbb{R}^d$, que es unión del conjunto y su complemento, sería acotado).*

1.4. Medida de intervalos en $\mathbb{R}^d$

Definición 1.4.1 *Si $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$ es un intervalo en $\mathbb{R}^d$ (siendo los I_i intervalos en $\mathbb{R}$) definimos la medida (o volumen) de I por:*

$$m(I) = m(I_1) \cdot m(I_2) \cdots m(I_d)$$

Observamos que $m(\emptyset) = 0$.

Teorema 1.4.2 (Aditividad de la medida de intervalos) *Si un intervalo I se escribe como unión finita de intervalos disjuntos I_i, la medida de I es la suma de las medidas de los I_i:*

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \ (I_i \textit{ disjuntos}) \ \Rightarrow \ m(I) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i)$$

Demostración: Hacemos inducción en n (el número de partes en que se parte el intervalo). Supongamos primero $n = 2$
Cuando un intervalo de $\mathbb{R}^d$ se descompone como unión de dos intervalos disjuntos es porque se parte uno de los lados.

Supongamos que $I = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_d$ y que: $I_1 = H \cup L$ (siendo H,L intervalos disjuntos) de modo que $I = I_1 \cup I_2$ donde:

$$I_1 = H \times J_2 \times \ldots \times J_n$$

y

$$I_2 = L \times J_2 \times \ldots \times J_n$$

Tenemos que:

$$m(I) = m(J_1) \cdot m(J_2) \cdots m(J_n) = (m(H) + m(L)) \cdot m(J_2) \cdot m(J_3) \cdots m(J_d) =$$

$$= m(H) \cdot m(J_2) \cdot m(J_3) \cdots m(J_d) + m(L) \cdot m(J_2) \cdots m(J_3) \cdots m(J_d) = m(I_1) + m(I_2)$$

Esto prueba el teorema en este caso.

Observemos que si I y J son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$, al proyectar sobre alguno de los ejes tenemos que obtener intervalos disjuntos: Si

$$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_d$$

$$J = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_d$$

entonces: $I \cap J = (I_1 \cap J_1) \times (I_2 \cap J_2) \times \ldots \times (I_d \cap J_d)$. Si para todo i fuera $I_i \cap J_i \neq \emptyset$, entonces $I \cap J \neq \emptyset$. Supongamos por ejemplo que $I_k \cap J_k = \emptyset$, entonces existe un hiperplano de ecuación $x_k = c$ que deja a I y J en semiespacios complementarios:

$$x_k \leq c, x_k > c$$

$$x_k < c, x_k \geq c$$

o sea existen semiespacios complementarios S' y S'' tales que $I_k \subset S'$ y $J_k \subset S''$.

Si $H \subset \mathbb{R}^d$ es un intervalo, notaremos

$$H' = H \cap S', \quad H'' = H \cap S''$$

entonces H' y H'' son intervalos disjuntos, y se tine que $H' \subset S$ y $H'' \subset S''$.[B Utilizando estas ideas, vamos a demostrar el teorema: Supongamos $n > 2$, y que el teorema vale para descomposiciones en $n-1$ intervalos. Consideramos ahora, una descomposición en n intervalos disjuntos:

$$I = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \text{ } (I_i \text{ disjuntos})$$

Podemos claramente suponer que $I_i \neq \emptyset$ para todo i, sin perdida de generalidad. Como $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ existe un hiperplano de ecuación $x_j = c$ que deja a I_1 e I_2 en semiespacios complementarios S' y S'':

Tenemos que:

$$I' = I \cap S' = \bigcup_{i=1}^{n} (I_i \cap S') = \bigcup_{i=1}^{n} I_i'$$

donde la union es disjunta, y como $I_1 \subset S'$, deducimos que $I_1' = I_1$ e $I_2'' = \emptyset$ pues $I_2 \subset S''$.

Análogamente,

$$I'' = I \cap S'' = \bigcup_{i=1}^{n} (I_i \cap S'') = \bigcup_{i=1}^{n} I_i''$$

donde la unión es disjunta, e $I' = I_2, I'' = \emptyset$.

Tenemos pues:

$$I' = I_1' \cup I_3' \cup I_4' \cup \ldots I_n'$$

$$I'' = I_2'' \cup I_3'' \cup I_4'' \cup I_n''$$

que son dos descomposiciones en $n-1$ intervalos disjuntos, y por lo tanto por la hipotesis inductiva:

$$m(I') = m(I_1) + m(I_3') + m(I_4') + \ldots + m(I_n')$$

$$m(I'') = m(I_2) + m(I_3'') + m(I_4'') + \ldots + m(I_n'')$$

Tenemos que $I = I' \cup I''$ con $I' \cap I'' = \emptyset$, luego $m(I) = m(I') + m(I'')$, en consecuencia:

$$m(I) = m(I_1)+m(I_3')+m(I_4')+\ldots+m(I_d')+m(I_2)+m(I_3'')+m(I_4'')+\ldots+m(I_n'')$$

$$= m(I_1) + m(I_2) + (m(I_3') + m(I_3'')) + (m(I_4') + m(I_4'')) + \ldots + (m(I_d') + m(I_n''))$$

$$= m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_n)$$

como queríamos demostrar. □

La aditividad es la propiedad clave de la medida que intentaremos mantener al extender la medida a clases más generales de conjuntos.

1.5. Medida de Conjuntos Elementales

Definición 1.5.1 *Si $A = \bigcup_{i=1}^n I_i$ es un conjunto elemental (donde los I_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$) definimos su medida elemental $m(A)$ (también notada a veces $|A|$) por:*

$$m(A) = \sum_{i=1}^n m(I_i)$$

Hay que comprobar que la definición es correcta: Supongamos que

$$A = \bigcup_{j=1}^m J_j$$

es otra descomposción de A como unión de intervalos disjuntos. Entonces, en virtud de la propiedad distributiva,

$$I_i = I_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^m J_j \right) = \bigcup_{i=1}^m (I_i \cap J_j)$$

Esta es una unión disjunta de intervalos. Por lo tanto, por la aditividad de la medida de intervalos,

$$\sum_{i=1}^n m(I_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m(I_i \cap J_j).$$

Analogamente,

$$J_j = \bigcup_{i=1}^n (I_i \cap J_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^m m(J_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n m(I_i \cap J_j)$$

Por lo tanto:

$$\sum_{i=1}^{n} m(I_i) = \sum_{j=1}^{m} m(J_j)$$

En consecuencia, las dos descomposiciones dan el mismo valor para $m(A)$.

Corolario 1.5.2 (aditividad) *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos elementales disjuntos y $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ entonces: $m(A) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$.*

Demostración: Cada A_k será unión de n_k intervalos disjuntos I_{ki}:

$$A_k = \bigcup_{i=1}^{n_k} I_{ki} \Rightarrow m(A_k) = \sum_{i=1}^{n_k} m(I_{ki})$$

Tenemos:

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{n_k} I_{ki} \text{ (unión disjunta)}$$

luego

$$m(A) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n_k} m(I_{ki}) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

□

Corolario 1.5.3 *Si A y B son conjuntos elementales, y $A \subset B$ entonces:*

$$m(B - A) = m(B) - m(A)$$

y

$$m(A) \leq m(B) \text{ (La medida elemental es creciente)}$$

Demostración: Tenemos que:

$$B = A \cup (B - A) \text{ (union disjunta)}$$

Luego,

$$m(B) = m(A) + m(B - A) \Rightarrow m(B - A) = m(B) - m(A)$$

Como

$$m(B - A) \geq 0 \Rightarrow m(A) \leq m(B)$$

□

Corolario 1.5.4 *Si A y B son conjuntos elementales*

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Demostración: Tenemos que:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B)(\text{unión disjunta})$$

Luego,

$$m(A) = m(A - B) + m(A \cap B)$$

Análogamente,

$$m(B) = m(B - A) + m(A \cap B)$$

Sumando estas relaciones:

$$m(A) + m(B) = m(A - B) + m(B - A) + 2m(A \cap B) \tag{1.1}$$

Pero

$$A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) \text{ (union disjunta)}$$

luego

$$m(A \cup B) = m(A - B) + m(B - A) + m(A \cap B) \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) deducimos que:

$$m(A) + m(B) = m(A \cup B) + m(A \cap B)$$

□

Corolario 1.5.5 (subaditividad)

$$m(A \cup B) \leq m(A) + m(B)$$

(ya que $m(A \cap B) \geq 0$). Por inducción en k deducimos que:

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) \leq m(A_1) + m(A_2) + \ldots + m(A_k)$$

Observación 1.5.6 *Sea $I \subset \mathbb{R}^d$ un intervalo. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen un intervalo cerrado $F \subset I$ tal que $m(F) > m(I) - \varepsilon$, y un intervalo abierto $G \supset I$ tal que $m(G) < m(J) + \varepsilon$.*

Lema 1.5.7 *Si A es un conjunto elemental y $\varepsilon > 0$, entonces existen un conjunto elemental cerrado $F \subset A$ y un conjunto elemental abierto $G \supset A$ tales que:*

$$m(G) < m(A) + \varepsilon$$

y

$$m(F) > m(A) - \varepsilon$$

Demostración: Sea $A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ (donde los I_i son intervalos disjuntos de $\mathbb{R}^d$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada i con $1 \leq i \leq n$, existen un intervalo cerrado $F_i \subset I_i$ y un intervalo abierto $G_i \supset I_i$ tales que:

$$m(F_i) \geq m(I_i) - \frac{\varepsilon}{n}$$

$$m(G_i) \leq m(I_i) + \frac{\varepsilon}{n}$$

Definimos entonces, los conjuntos F y G por:

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i, \quad G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$$

Desde luego, $F \subset A \subset G$. F es cerrado por ser unión finita de cerrados y G es abierto por ser unión de abiertos.

Por otra parte, los F_i son disjuntos por serlo los I_i (los G_i no tienen porqué serlo), en consecuencia F es elemental, y

$$m(F) = \sum_{i=1}^{n} m(F_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(m(I_i) - \frac{\varepsilon}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i) - \varepsilon = m(A) - \varepsilon$$

Notemos también que G es elemental por ser unión finita de elementales, y que:

$$m(G) \leq \sum_{i=1}^{n} m(G_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(m(I_i) + \frac{\varepsilon}{n} \right) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i) + \varepsilon = m(A) + \varepsilon$$

Esto prueba el lema. □

Teorema 1.5.8 (σ-subaditividad de la medida elemental) *Sea $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ una sucesión infinita de conjuntos elementales y sea A un conjunto elemental tal que*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Entonces:

$$m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

Demostración: Si la serie es divergente no hay nada que probar. Suponemos pues:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) < \infty$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $F \subset A$ elemental cerrado tal que:

$$m(F) > m(A) - \varepsilon$$

y para cada $k \in \mathbb{N}$, existe un $G_k \supset A_k$ elemental abierto tal que:

$$m(G_k) \leq m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Entonces,

$$F \subset A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

F es un conjunto cerrado y acotado (está incluido en A, que es elemental) y por lo tanto compacto, y los G_k forman un cubrimiento por abiertos, luego existe un subcubrimiento finito, es decir: existe un $n > 0$ tal que:

$$F \subset \bigcup_{k=1}^{n} G_k$$

En consecuencia,

$$m(F) \leq m\left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(G_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(m(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \varepsilon$$

Resulta entonces que:

$$m(A) - \varepsilon \leq m(F) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \varepsilon$$

o sea que:

$$m(A) - \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos el teorema. □

Corolario 1.5.9 (σ-aditividad de la medida elemental) *Si un conjunto elemental A se descompone como la unión numerable de conjuntos elementales disjuntos A_k:*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

entonces:

$$m(A) = \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k)$$

Demostración: Por el teorema anterior, como

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Rightarrow m(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \tag{1.3}$$

Por otra parte tenemos que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset A \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq m(A)$$

y como la unión es disjunta:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq m(A)$$

Cuando n tiende a infinito resulta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq m(A) \tag{1.4}$$

(Notemos que la serie converge pues sus sumas parciales forman una sucesion creciente y acotada). De (1.3) y (1.4) se obtiene el teorema. □

1.6. Conjuntos σ-elementales

Definición 1.6.1 *Un conjunto* **σ-elemental** *es el que puede representarse como una unión numerable de conjuntos elementales disjuntos:*

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Observación 1.6.2 *Si $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ donde los A_i son elementales (no necesariamente disjuntos) $\Rightarrow U$ es σ-elemental. En efecto definamos una nueva sucesión B_i poniendo:*

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, B_3 = A_3 - A_1 \cup A_2, \text{ y en general } B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

entonces:

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

donde los B_k son elementales pero ahora la unión es disjunta. En consecuencia, U es σ-elemental.

Proposición 1.6.3 *Si $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$ donde cada U_k es σ-elemental entonces U es σ-elemental.*

(La unión numerable de numerables, es numerable)

Proposición 1.6.4 *Si U y V son σ-elementales, entonces $U \cap V$ es σ-elemental.*

Demostración: Sean

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad V = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

donde los A_i, B_j son elementales. Entonces,

$$U \cap V = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_i \cap B_j)$$

Esta es una unión numerable de conjuntos elementales (por la propiedad 1.3.2), en consecuencia, $U \cap V$ es σ-elemental. □

Observación 1.6.5 *En cambio la intersección numerable de conjuntos elementales puede no ser σ-elemental. Contraejemplo: el conjunto ternario de Cantor (definido en la práctica 0). Este conjunto no puede ser σ-elemental pues, como tiene interior vacío, si lo fuera tendría que ser numerable. Pero tiene la potencia del continuo. El mismo ejemplo prueba que el complemento de un conjunto σ-elemental puede no ser σ elemental. En efecto, si C^c denota el complemento del ternario de Cantor, entonces C^c es σ-elemental, mientras que $(C^c)^c = C$ no lo es. Se deduce que en general la diferencia de dos conjuntos σ-elementales, puede no ser σ-elemental (pue $C^c = \mathbb{R} - C$.)*

1.7. Medida de conjuntos σ-elementales

Definición 1.7.1 *Si $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ (A_i elementales disjuntos) definimos su medida $m(U)$ (a veces notada también $|U|$) por:*

$$m(U) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

Esta serie no siempre converge (La medida de un σ-elemental puede valer $+\infty$).

Hay que probar que esta definición es correcta: Si

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$$

es otra descomposición de U como unión numerable de elementales disjuntos tenemos como antes:

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_i \cap B_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(A_i \cap B_j)$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B_j) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i \cap B_j)$$

Dado que una serie doble de términos no negativos puede sumarse en cualquier orden sin que cambie el valor de sus suma, siendo $m(A_i \cap B_j) \geq 0$; resulta que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j)$$

Por lo que ambas descomposiciones dan el mismo valor para $m(U)$.

Teorema 1.7.2 *Cualquier conjunto abierto en $\mathbb{R}^d$ es σ-elemental.*

Demostración: Sea G un abierto. Para cada punto x de G existe un cubo abierto Q_x contenido en G que lo contiene (hay una bola centrada en x contenida en G, y dicha bola contiene un cubo). Los cubos Q_x forman un cubrimiento abierto de G, y como $\mathbb{R}^d$ es un espacio separable podemos extraerle un subcubrimento numerable. □

Teorema 1.7.3 (σ-subaditividad para σ-elementales) *Si*

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

siendo U,U_k conjuntos σ-elementales, entonces

$$m(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k)$$

En particular, si $U \subset V$ entonces, $m(U) \leq m(V)$.

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(U_k) < +\infty$$

Sean

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad (A_k \text{ elementales disjuntos})$$

$$U_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj} \quad (\text{Para cada } k : B_{kj} \text{ elementales disjuntos})$$

entonces

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{kj}$$

Notemos que $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es un conjunto elemental que está incluido en la unión de la sucesión infinita de elementales B_{kj}. Por el teorema 1.5.8, deducimos que:

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} m(B_{kj}) = \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k)$$

O sea

$$\sum_{k=1}^{n} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k)$$

Haciendo que $n \to \infty$ resulta que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k)$$

(La serie del primer miembro converge por formar sus sumas parciales una sucesión creciente y acotada). Pero, por definición, esto es:

$$m(U) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k)$$

□

1.8. Medida exterior de Lebesgue

Definición 1.8.1 *Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$, definimos su* **medida exterior** *(de Lebesgue) notada $m_e(E)$ como el ínfimo de las medidas de los σ-elementales que incluyen a E:*

$$m_e(E) = \text{ínf}\{m(U) : U \supset E,\ U\sigma - elemental\ \}$$

Observación: Cualquier conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene una medida exterior.

Otra Observación: Si $m_e(E)$ es finita y $\varepsilon > 0$, existe un $U\sigma$-elemental tal que:

$$m(U) < m_e(E) + \varepsilon$$

(Por la definición de ínfimo)

Proposición 1.8.2 (Propiedades de la medida Exterior) *La medida exterior de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:*

i) $0 \leq m_e(E) \leq +\infty$.

ii) $m_e(\emptyset) = 0$.

iii) *Si $E_1 \subset E_2$, entonces $m_e(E_1) \leq m_e(E_2)$.*

iv) *La medida exterior es σ-subaditiva:*

$$m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k)$$

v) *Si U es σ-elemental $m(U) = m_e(U)$*

(Para un conjunto σ-elemental la medida y la medida exterior coinciden)

Demostración:

i) Es evidente por definición, ii) también ya que el conjunto vacío es σ-elemental.

Para demostrar iii) observemos que, si U es un σ-elemental y $U \supset E_2$, entonces $U \supset E_1 \Rightarrow m_e(E_1) \leq m(U)$. Pero esto vale para cualquier σ-elemental U que incluya a E_2, luego:

$$m_e(E_1) \leq \text{ínf}\{m(U) : U \supset E_2, U\ \sigma - \text{elemental}\ \} = m_e(E_2)$$

Esto prueba iii).

Demostremos ahora la afirmación iv): Sea

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Si algún E_k tuviera medida exterior $+\infty$ no hay nada que probar. Supondremos pues que $m_e(E_k) < +\infty \ \forall k$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existirá para cada k un σ-elemental $U_k \supset E_k$ tal que:

$$m(U_k) < m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Definimos:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

Entonces U es σ-elemental y $U \supset E$. Por otra parte, $m_e(E) \leq m(U)$ (por definición), entonces:

$$m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(U_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k) + \varepsilon$$

y como ε es arbitrario:

$$m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k)$$

Finalmente, demostremos la afirmación v): Como U es un conjunto σ-elemental que incluye a U,

$$m_e(U) \leq m(U) \tag{1.5}$$

Por otra parte, si V es un σ-elemental con $V \supset U$, entonces $m(U) \leq m(V)$. Pero esto vale para cualquier σ-elemental que incluya a U luego:

$$m(U) \leq \text{ínf}\{m(V) : V \supset U, \ V \ \sigma - \text{elemental} \} = m_e(U) \tag{1.6}$$

Como probamos las dos desigualdades (1.5) y (1.6), vale la igualdad. □

Observación 1.8.3 *La medida exterior no es aditiva en general: puede demostrarse que existen S y T con $S \cap T = \emptyset$ tales que: $m_e(S \cup T) < m_e(S) + m_e(T)$*

Un resultado positivo es el siguiente:

Ejercicio 1.8.4 *Si S y T son tales que $d(S,T) > 0$, entonces: $m_e(S \cup T) = m_e(S) + m_e(T)$ (ejercicio 1 de la práctica 1)*

1.9. Conjuntos Medibles (Lebesgue)

Definición 1.9.1 *Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ es* **medible** *(en el sentido de Lebesgue) si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto σ-elemental U tal que $U \supset E$ y $m_e(U - E) < \varepsilon$.*

Notacion:

$$\mathcal{M} = \{E \subset \mathbb{R}^d : E \text{ es medible Lebesgue }\}$$

Propiedad 1.9.2 *Todo conjunto σ-elemental es medible. En particular todo conjunto abierto es medible.*

Demostración: Si E es σ-elemental, tomamos $U = E$. Entonces $m_e(U - E) = m_e(\emptyset) = 0 < \varepsilon$ □

Definición 1.9.3 *Diremos que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene medida cero o medida nula si $m_e(E) = 0$*

Observación: Todo conjunto numerable tiene medida nula. El ternario de Cantor es un ejemplo de conjunto de medida nula que tiene la potencia del continuo.

Observación 1.9.4 *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ tiene medida nula, entonces es medible.*

Demostración: Como $m_e(E) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $U\sigma$-elemental tal que $U \supset E$, y $m(U) < \varepsilon$. Como $U - E \subset U \Rightarrow m_e(U - E) \leq m_e(U) < \varepsilon$ Como ε es arbitrario, concluimos que E es medible. □

Propiedad 1.9.5 *Si $E_k \in \mathcal{M}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ es una sucesión finita o infinita de conjuntos medibles entonces*

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$$

En otras palabras: la unión numerable de conjuntos medibles es medible.

Demostración: Sea

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Dado $\varepsilon > 0$, para cada k podemos encontrar un σ-elemental $U_k \supset E_k$ tal que $m_e(U_k - E_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$. Consideremos entonces, el conjunto:

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$$

Es un conjunto σ-elemental y $U \supset E$. Además:

$$U - E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k - E_k)$$

(Si $x \in U$ y $x \notin E$ está en alguno de los U_k y en ninguno de los E_k). En consecuencia:

$$m_e(U - E) \leq m_e \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (U_k - E_k) \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(U_k - E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

(Utilizamos que la medida exterior es creciente y σ-subaditiva)
Como ε es arbitrario, esto prueba que E es medible. □

Propiedad 1.9.6 *Si E_1 y E_2 son conjuntos medibles entonces $E_1 \cap E_2$ es medible.*

Demostración: Sean $E = E_1 \cap E_2$ y $\varepsilon > 0$. Como E_1 es medible, existe un conjunto σ-elemental U_1 tal que $U_1 \supset E_1$ y $m_e(U_1 - E_1) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Del mismo modo, como E_2 es medible existe otro conjunto conjunto σ-elemental U_2 tal que $U_2 \supset E_2$ y $m_e(U_2 - E_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Consideremos el conjunto: $U = U_1 \cap U_2$. Entonces, $U \supset E$ y $U - E \subset (U_1 - E_1) \cup (U_2 - E_2)$ (Pues si $x \in U - E$ entonces está en $U_1 y$ en U_2 pero o no está en $E_1 o$ no está en U_2). En consecuencia,

$$m_e(U - E) \leq m_e(U_1 - E_1) + m_e(U_2 - E_2) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, esto prueba que E es medible. □

Definición 1.9.7 *Si $E \in \mathcal{M}$ (es medible) definimos su* **medida de Lebesgue** *$m(E)$ por:*

$$m(E) = m_e(E)$$

(Es decir que para un conjunto medible, su medida es por definición, su medida exterior.)

Definición 1.9.8 *Diremos que $E \subset \mathbb{R}^d$ es* **finitamente medible** *si es medible y $m(E) < +\infty$.*

El siguiente lema da una caracterización útil de los conjuntos finitamente medibles:

Lema 1.9.9 *E es finitamente medible si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto elemental A tal que $m_e(A \Delta E) < \varepsilon$*

Demostración: $\Rightarrow)$: Supongamos E finitamente medible. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe U σ-elemental tal que $U \supset E$ y $m_e(U-E) < \varepsilon$. Como U es σ-elemental se puede escribir como una unión disjunta de intervalos

$$I_k : U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

Tenemos que:

$$U \subset E \cup (U-E) \Rightarrow m(U) = m_e(U) \leq m_e(E) + m_e(U-E)$$

Tanto $m_e(E)$ como $m_e(U-E)$ son finitas, entonces $m(U) < +\infty$, y

$$m(U) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i)$$

Como $m(U) < +\infty$ esta serie converge, por lo tanto es posible elegir un i_0 tal que:

$$\sum_{i=i_0+1}^{\infty} m(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Hecho esto llamemos:

$$A = \bigcup_{i=1}^{i_0} I_i$$

y

$$V = \bigcup_{i=i_0+1}^{\infty} I_i$$

entonces $A - E \subset U - E$, pues $A \subset U$, entonces

$$m_e(A-E) \leq m_e(U-E) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y $E - A \subset U - A = V$, V es σ-elemental, y por otra parte,

$$m(V) = \sum_{i=i_0+1}^{\infty} m(I_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

luego:

$$m_e(E-A) \leq m(V) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por último:

$$A \Delta E = (A-E) \cup (E-A)$$

En consecuencia,

$$m_e(A \Delta E) \leq m_e(A-E) + m_e(E-A) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto elemental A tal que:

$$m_e(A\Delta E) < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$ sea A tal que $m_e(A\Delta E) < \varepsilon$. Entonces, por la definición de la medida exterior, existe $V \supset A\Delta E$, σ-elemental tal que $m(V) < m_e(A\Delta E) + \varepsilon < 2\varepsilon$
Sea $U = A \cup V$, entonces A es elemental y V es σ-elemental, en consecuencia, U es σ-elemental

$$U - E \subset (U - A) \cup (A - E)$$

$U - A \subset V$ y $A - E \subset A\Delta E \subset V$, luego $U - E \subset V$. En consecuencia,

$$m_e(U - E) \leq m_e(V) < 2\varepsilon$$

Como ε es arbitrario, esto prueba que E es medible. Además como $E \subset U$,

$$m_e(E) \leq m(U) \leq m(A) + m(A) \leq m(A) + 2\varepsilon < +\infty$$

ya que la medida de un conjunto elemental es siempre finita. Esto prueba el lema. □

El lema anterior admite una interpretación interesante. Consideramos la clase

$$\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R}^d : m_e(E) < +\infty\}$$

Si $\mathcal{M}$ es la clase de los medibles y $\mathcal{M}_f$ la de los finitamente medibles:

$$\mathcal{M}_f = \mathcal{M} \cap \mathcal{F}$$

y si $\mathcal{E}$ es la clase de los elementales $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$.
Vamos a convertir a $\mathcal{F}$ en un espacio seudo-métrico. Para ello, si $S, T \in \mathcal{F}$, definimos la distancia de S a T por:

$$d(S,T) = m_e(S\Delta T)$$

Notamos que se verifican las propiedades de la distancia:

$$d(S,T) = d(T,S)$$

$$d(S,T) \leq d(S,Z) + d(Z,T)$$

Demostración:

$$S\Delta T \subset (S\Delta Z) \cup (Z\Delta T)$$

En consecuencia,

$$m_e(S\Delta T) \leq m_e(S\Delta Z) + m_e(Z\Delta T)$$

□

$$d(S,S) = 0$$

pero dos conjuntos pueden estar a distancia cero sin ser iguales Con este concepto de distancia el lema se puede enunciar de otra manera:

Lema 1.9.10 *E es finitamente medible si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe A elemental tal que $d(A, E) < \varepsilon$. En otras palabras: $\mathcal{M}_f = \overline{\mathcal{E}}$ (Los finitamente medibles son la clausura de los elementales)*

Teorema 1.9.11 *Si E y F son medibles cualesquiera, entonces $E - F$ es medible.*

Demostración: 1) Supongamos primero que E y F son finitamente medibles entonces por el lema existe una sucesión A_k de conjuntos elementales tal que $A_k \to E$ cuando $k \to \infty$ (A_k tiende a E en la pseudo-distancia d) y existe una sucesión B_k de conjuntos elementales tal que $B_k \to F$ cuando $k \to \infty$,

$$(A_k - B_k)\Delta(E - F) \subset (A_k \Delta E) \cup (B_k \Delta F) \Rightarrow$$

$$m_e((A_k - B_k)\Delta(E - F)) \leq m_e(A_k \Delta E) + m_e(B_k \Delta F)$$

o sea: $\quad d(A_k - B_k, E - F) \leq d(A_k, E) + d(B_k, F)$
Por lo tanto $A_k - B_k \to E - F$. Como $A_k - B_k$ es elemental, por el lema $E - F$ es finitamente medible.

Observación: Incidentalmente hemos probado que la diferencia de conjuntos, considerada como una función de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$, es una función continua.

En el caso general en que E y F son medibles que pueden tener medida $+\infty$ procedemos así: sea $Q_k = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_i| \leq k (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ el cubo cerrado centrado en el origen de lado $2k$ entonces:

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

En consecuencia,

$$E - F = \bigcup_{k=1}^{\infty} [(E - F) \cap Q_k] = \bigcup_{k=1}^{\infty} [(E \cap Q_k) - (F \cap Q_k)]$$

E es medible, Q_k es finitamente medible, por lo tanto $E \cap Q_k$ es medible y como:

$$m(E \cap Q_k) \leq m(Q_k) \text{ es finitamente medible.}$$

Analogamente $F \cap Q_k$ es finitamente medible.
Por lo antes demostrado $(E \cap Q_k) - (F \cap Q_k)$ es finitamente medible, por lo tanto $E - F$ es unión numerable de medibles, y en consecuencia, es medible.
Esto prueba el teorema. $\Box$

Corolario 1.9.12 *El complemento de un conjunto medible es medible.*

Dem: $E^c = \mathbb{R}^d - E$ ($\mathbb{R}^d$ es medible)

Corolario 1.9.13 *La intersección numerable de conjuntos medibles es medible.*

Demostración: Sean $E_k (k = 1, 2, \dots)$ conjuntos medibles y sea $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ entonces:

$$E^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c$$

por la ley de De Morgan. Cada E_k^c es medible, en consecuencia $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^c$ es medible, y por lo tanto E es medible. □

Resumen: La clase $\mathcal{M}$ de los conjuntos medibles (Lebesgue) forma una **σ-álgebra**, es decir es cerrada bajo uniones e intersecciones numerables y complemento.

1.10. Propiedades de la medida de Conjuntos Medibles

Recordamos que para un conjunto medible su medida no es otra cosa que su medida exterior. Recordamos también que en el espacio $\mathcal{F}$ de los conjuntos de medida exterior finita introdujimos la distancia $d(A, B) = m_e(A \Delta B)$

Proposición 1.10.1 *Supongamos que $A_k, A \in \mathcal{F}$ y que $A_k \to A$ en la seudo-distancia d, entonces: $m_e(A_k) \to m_e(A)$ (En otras palabras; la medida exterior, como función de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}$, es una función continua)*

Proposición 1.10.2 *Si E_1 y E_2 son conjuntos medibles entonces:*

$$m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

Demostración: Si fuera $m(E_1) = +\infty$ o $m(E_2) = +\infty$ entonces $m(E_1 \cup E_2) = +\infty$. Podemos pues suponer que E_1 y E_2 son finitamente medibles. En tal caso existen sucesiones A_k, B_k de conjuntos elementales tales que $A_k \to E_1$ y $B_k \to E_2$. de modo que $m(A_k) \to m(A)$ y $m(B_k) \to m(B)$. Entonces, tenemos que:

$$(A_k \cup B_k)\Delta(E_1 \cup E_2) \subset (A_k \Delta E_1) \cup (B_k \Delta E_2)$$

En consecuencia,

$$m_e(A_k \cup B_k)\Delta(E_1 \cup E_2)) \leq m_e(A_k \Delta E_1) + m_e(B_k \Delta E_2)$$

y por lo tanto

$$d(A_k \cup B_k, E_1 \cup E_2) \leq d(A_k, E_1) + d(B_k, E_2)$$

Luego $A_k \cup B_k \to E_1 \cup E_2$, en consecuencia $m(A_k \cup B_k) \to m(E_1 \cup E_2)$

($A_k \cup B_k$ es elemental , $E_1 \cup E_2$ es medible)

Analogamente tenemos que:

$$(A_k \cap B_k)\Delta(E_1 \cap E_2) \subset (A_k \Delta E_1) \cup (B_k \Delta E_2)$$

entonces

$$d(A_k \cap B_k, E_1 \cap E_2) \leq d(A_k \Delta E_1) + d(B_k \Delta E_2)$$

luego $A_k \cap B_k \to E_1 \cap E_2$, en consecuencia: $m(A_k \cap B_k) \to m(E_1 \cap E_2)$ Como ya se probó anteriormente, tenemos que

$$m(A_k \cup B_k) + m(A_k \cap B_k) = m(A_k) + m(B_k)$$

y al hacer que $k \to \infty$, se obtiene el teorema. □

Observación: Incidentalmente se *ha* probado que la unión y la intersección de conjuntos (como funciones de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$ son funciones continuas.

Caso particular: Si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces

$$m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$$

Corolario 1.10.3 *(Por inducción) Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son conjuntos medibles disjuntos entonces si*

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \Rightarrow m(E) = \sum_{k=1}^{n} m(E_k)$$

Proposición 1.10.4 (σ-aditividad de la medida de Lebesgue) *Sea (E_k) una familia numerable de conjuntos medibles disjuntos y*

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \Rightarrow m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

Este es el resultado fundamental de la teoría de Lebesgue.

Demostración: Tenemos que

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k)$$

por la σ-subaditividad de la medida exterior. Como, por otra parte:

$$\bigcup_{k=1}^{n} E_k \subset E \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \leq m(E)$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} m(E_k) \leq m(E)$$

Al hacer que $n \to \infty$, se obtiene que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \leq m(E)$$

que es la otra desigualdad. □

Ejercicio: Probar que la proposición 1.10.4 continúa siendo ciera si los conjuntos $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ son "casi disjuntos" en el sentido de que $m(E_i \cap E_j) = 0$ si $i \neq j$.

Otro ejercicio: Probar que si $E_1 \subset \mathbb{R}_1^d$ y $E_2 \subset \mathbb{R}_2^d$ son medibles, entonces $E_1 \times E_2$ es medible en $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$, y se tiene que:

$$m(E_1 \times E_2) = m(E_1) \times m(E_2)$$

(donde hacemos el convenio de que $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$. ¿Porqué es necesario este convenio?)

1.11. Propiedades de continuidad de la medida

Teorema 1.11.1 *Sean $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles*

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

y

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Entonces

$$m(E) = \lim_{n \to +\infty} m(E_n)$$

Demostración: Notamos que si algún E_{n_0} tuviera medida infinita, entonces también sería $m(E_n) = +\infty$ para $n \neq n_0$ y $m(E) = +\infty$ pues $E_{n_0} \subset E_n \subset E$ para $n \geq n_0$, y la medida es creciente. En consecuencia, el teorema se verifica trivialmente en este caso.

Podemos suponer pues que todos los E_n tienen medida finita. Pongamos $E_0 = \emptyset$. Notamos que entonces:

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n - E_{n-1})$$

donde la unión es ahora disjunta. En consecuencia por la σ-aditividad de la medida de Lebesgue,

$$m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n - E_{n-1})$$

Pero como $E_{n-1} \subset E_n$,

$$m(E_n - E_{n-1}) = m(E_n) - m(E_{n-1})$$

En consecuncia tenemos (serie telescópica):

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n - E_{n-1}) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} m(E_n - E_{n-1})$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \sum_{n=1}^{k} [m(E_n) - m(E_{n-1})] = \lim_{k \to +\infty} m(E_k)$$

pues $m(E_0) = m(\emptyset) = 0$. □

Teorema 1.11.2 *Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles*

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$$

y

$$E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Entonces si $m(E_{n_0}) < +\infty$ para algún n_0,

$$m(E) = \lim_{n \to +\infty} m(E_n)$$

Demostración: Tomando complemento con respecto a E_{n_0} tenemos que:

$$E_{n_0} - E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E_{n_0} - E_n) \text{ (ley de De Morgan)}$$

Utilizando el teorema 1.11.1 tenemos entonces que:

$$m(E_{n_0} - E) = \lim_{n \to +\infty} m(E_{n_0} - E_n)$$

Como $E_n \subset E_{n_0}$, y $E \subset E_{n_0}$, todos tienen medida finita y se tiene que

$$m(E_{n_0} - E) = m(E_{n_0}) - m(E), \quad m(E_{n_0} - E_n) = m(E_{n_0}) - m(E_n)$$

Por lo tanto:

$$m(E_{n_0}) - m(E) = \lim_{n \to +\infty} m(E_{n_0}) - m(E_n) = m(E_{n_0}) - \left(\lim_{n \to +\infty} m(E_n) \right)$$

Concluimos que:

$$m(E) = \lim_{n \to +\infty} m(E_n)$$

□

Observación: Esta última propiedad no es válida si los E_n tienen todos medida infinita. Contraejemplo: $E_n = [n, +\infty)$ en $\mathbb{R}$, $E = \emptyset$.

1.12. Caracterizaciones de los conjuntos medibles

Definición 1.12.1 *Diremos que $A \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de clase G_δ si es intersección numerable de abiertos: $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ donde los G_k son abiertos.*

Definición 1.12.2 *Diremos que $B \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto de clase F_σ si es unión numerable de cerrados: $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ donde los F_k son cerrados.*

Observación 1.12.3 *El complemento de un F_σ es un G_δ y recíprocamente.*

Ejercicio: (de Cálculo Avanzado)

1. Probar que todo cerrado es de clase G_δ.
2. Probar que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ.

Observación 1.12.4 *Como todo abierto es medible $\Rightarrow$ todo cerrado es medible (ya que la clase de los medibles es cerrada por complemento), en consecuencia todo conjunto de clase F_σ o de clase G_δ es medible (ya que la clase de los medibles es cerrada por uniones e intersecciones numerables)*

Teorema 1.12.5 *Para $E \subset \mathbb{R}^d$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

a) E es medible

b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto G tal que $E \subset G$ y $m_e(G - E) < \varepsilon$

c) Existen $G, N \subset \mathbb{R}^d$ tales que G es G_δ, N tiene medida cero y $E = G - N$

d) Existen $F, N_1 \subset \mathbb{R}^N$ tales que F es F_δ , N_1 tiene medida cero y $E = F \cup N_1$

Demostración:
a) $\Rightarrow$ *b)* : Dado $\varepsilon > 0$, existe U σ-elemental tal que $U \supset E$ y $m_e(U - E) < \varepsilon$. Como U es σ-elemental será

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

donde los I_k son intervalos disjuntos. Para cada intervalo I_i podemos tomar un intervalo abierto J_i tal que: $I_i \subset J_i$ y $m(J_i) \leq m(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$.
Definimos entonces el conjunto:

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

Como los J_i son abiertos, G es abierto; y se tiene que $G \supset U \supset E$. Además,

$$G - E = (G - U) \cup (U - E)$$

$$G - U = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i \right) - \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (J_i - I_i)$$

Por lo tanto,

$$m(G - U) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i - I_i) = \sum_{k=1}^{\infty} (m(J_i) - m(I_i)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

En consecuencia,

$$m(G - E) \leq m(G - U) + m(U - E) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Como ε es arbitario, esto prueba $a) \Rightarrow b)$.

$b) \Rightarrow c)$: En $b)$ eligimos $\varepsilon = 1/k$ resulta que existe (para cada $k \in \mathbb{N}$) un abierto G_k tal que $G_k \supset E$ y $m_e(G_k - E) < 1/k$. Definimos entonces:

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

Resulta entonces que G es de clase G_δ y $G \supset E$.

Sea $N = G - E$. Como $G \subset G_k \Rightarrow G - E \subset G_k - E$, luego:

$$m_e(N) = m_e(G - E) \leq m_e(G_k - E) \leq 1/k$$

Como $k \in \mathbb{N}$ es arbitrario debe ser $m_e(N) = 0$. Claramente $E = G - N$

$c) \Rightarrow a)$: Si G es G_δ y N de medida nula $\Rightarrow$ son medibles y si $E = G - N \Rightarrow E$ es medible por ser diferencia de medibles.

$a) \Rightarrow d)$: Si E es medible $\Rightarrow E^c = \mathbb{R}^d - E$ es medible. Como ya probamos que $a) \Rightarrow c)$ deducimos que existen G de clase G_δ y N de medida nula tales que $E^c = G - N$. Sea $F = G^c = \mathbb{R}^d - G$ entonces F es de clase F_σ (complemento de un G_δ). Como $G \supset E^c \Rightarrow F \subset E$. Tenemos $E = F \cup N_1$

$$N_1 = E - F = E - (\mathbb{R}^N - G) = E \cap G = N \Rightarrow m(N_1) = 0$$

$d) \Rightarrow a)$: Si $E = F \cup N$ donde F es F_σ y N de medida nula, es medible por ser unión de medibles. □

Ejercicio 1.12.6 (otra caracterización de los conjuntos medibles) *C. Caratheodory probó que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible si y sólo si para cualquier conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ (medible o no) se cumple que:*

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \cap E^c)$$

(ejercicio de la práctica 1). Toda la teoría puede basarse en esta definición alternativa de conjunto medible (ver por ejemplo el libro de P. Halmos [Hal50]).

En el teorema anterior probamos que en la definición de conjunto medible es posible cambiar los σ-elementales por los abiertos. Vamos a probar que lo mismo puede hacerse al definir la medida exterior:

Teorema 1.12.7

$$m_e(E) = \text{ínf}\{m(G) : G \textit{ abierto}, \ G \supset E\}$$

Demostración: Notaremos

$$\alpha(E) = \text{ínf}\{m(G) : G \text{ abierto}, G \supset E\}$$

Todo abierto es σ-elemental, entonces

$$\{m(G) : G \text{ abierto}, \ G \supset E\} \subset \{m(U) : U \supset E, \ U\sigma - \text{elemental }\}$$

En consecuencia,

$$\text{ínf}\{m(G) : G \text{ abierto}, \ G \supset E\} \geq \text{ínf}\{m(U) : U \supset E, \ U\sigma - \text{elemental }\}$$

o sea,

$$\alpha(E) \geq m_e(E)$$

Ahota queremos probar que: $\alpha(E) \leq m_e(E)$. Si $m_e(E) = +\infty$ no hay nada que probar. Supondremos pues que $m_e(E) < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$ por la definición de la medida exterior existe un σ-elemental $U \supset E$ tal que $m(U) < m_e(E) + \varepsilon$. El conjunto U se escribirá en la forma:

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

donde los I_i son intervalos disjuntos. Para cada $i \in \mathbb{N}$ consideramos un intervalo abierto J_i tal que:

$$m(J_i) \leq m(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

y definimos

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$$

Entonces $G \supset U \supset E$ y G es abierto por ser unión de abiertos. Además:

$$m(G) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(J_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} m(I_i) + \varepsilon = m(U) + \varepsilon < m_e(E) + 2\varepsilon$$

Ahora por definición $\alpha(E) \leq m(G)$, luego: $\alpha(E) < m_e(E) + 2\varepsilon$ y como ε es arbitrario resulta: $\alpha(E) \leq m_e(E)$ Por lo tanto, $\alpha(E) = m_e(E)$ como queríamos probar. $\square$

1.13. Otras propiedades de la medida de Lebesgue

Teorema 1.13.1 (Invariancia por traslaciones) *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible, entonces $E + x$ es medible y $m(E + x) = m(E)$*

Teorema 1.13.2 (efecto de una dilatación) *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ es medible, entonces λE es medible y $m(\lambda E) = \lambda m(E)$*

Teorema 1.13.3 (efecto de una transformación lineal) *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible y $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ es una transformación lineal, entonces $T(E)$ es medible y $m(T(E)) = det(T) \cdot m(E)$*

Teorema 1.13.4 (regularidad de la medida) *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ es medible, entonces*

$$m(E) = \inf\{m(G) : G \supset E, G \text{ abierto }\}$$

y

$$m(E) = \sup\{m(K) : K \subset E, K \text{ compacto }\}$$

Demostración: Como la medida de un conjunto medible no es otra cosa que su medida exterior, la primer propiedad se deduce inmediatamente del teorema 1.12.7. La segunda parte la dejamos como ejercicio. □

1.14. El conjunto de las diferencias de un medible

Definición 1.14.1 *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, definimos su conjunto de diferencias por*

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

Teorema 1.14.2 (Teorema de Steinhaus) *Si $m(E) > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset D(E)$.*

Demostración: Notamos que en virtud de la regularidad de la medida, existirá un compacto $K \subset E$ con $0 < m(K) < +\infty$, y como $D(K) \subset D(E)$, bastará probar el teorema para K.

Como K es cerrado, si llamamos $U_n = \{x \in \mathbb{R} : d(x, K) < \frac{1}{n}\}$, tendremos que

$$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

y en consecuencia,

$$m(K) = \lim_{n \to +\infty} m(U_n)$$

por lo que podremos elegir n_0 tal que $m(U_{n_0}) < \frac{3}{2} m(F)$.

Tomamos entonces $\delta < \frac{1}{n_0}$. Afirmamos que si $|x| < \delta$, entonces $K \cap (K+x) \neq \emptyset$: si suponemos que no, tendremos que:

$$m(U_{n_0} - [K \cap (K+x)]) \leq m(U_{n_0} - K) + m(U_{n_0} - (K+x))$$

pues

$$U_{n_0} - [K \cap (K+x)] \subset (U_{n_0} - K) \cup (U_{n_0} - (K+x))$$

pero por la elección de δ, $K + x \subset U_{n_0}$, en consecuencia obtenemos que:

$$\begin{aligned} m(U_{n_0} - [K \cap (K+x)]) &\leq m(U_{n_0}) - m(K) + m(U_{n_0}) - m(K+x) \\ &= 2m(U_{n_0}) - 2m(K) < m(K) \end{aligned}$$

utilizando la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue, y nuestra elección de U_{n_0}.

Esto es una contradicción, pues como $K \subset U_{n_0}$, debe ser $m(K) \leq m(U_{n_0})$. Esta contradicción provino de suponer que K y $K + x$ eran disjuntos, en consecuencia existirá $y \in K$ tal que $x + y \in K$, y por lo tanto $x = (y + x) - y \in D(K) \subset D(E)$.

□

Corolario 1.14.3 *Si $E \subset \mathbb{R}$ es medible y $m(E) > 0$, entonces E tiene la potencia del continuo (esto es tiene cardinal $c = \#(\mathbb{R})$).*

Demostración: Claramente E es infinito no numerable (pues sino $m(E) = 0$). Por el teorema 1.14.2, deducimos que $c = \#\left((-\delta, \delta)\right) \leq D(E) \leq \#(E) \cdot \#(E) = \#(E)$, por ser $\#(E)$ un cardinal infinito[3]. □

1.15. Existencia de conjuntos no medibles

Teorema 1.15.1 (Vitali) *Existen conjuntos no medibles (Lebesgue). Más aún: cualquier conjunto medible $E \subset \mathbb{R}$ con medida positiva contiene un conjunto no medible.*

Demostración: En el conjunto E definimos una relación de equivalencia:

$$x \simeq y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

Consideramos esta relación restringida al conjunto E. Esto determina una partición del conjunto E en clases de equivalencia[4]

Utilizando el **axioma de elección**, formamos un conjunto V eligiendo un elemento en cada clase de equivalencia de E. El conjunto así "construido" recibe el nombre de **conjunto de Vitali**[5]. Vamos a probar que V no es medible.

[3]Notemos que esta prueba utiliza el axioma de elección (que se requiere para probar que $\alpha^2 = \alpha$ para todo cardinal infinito α), pero no la hipótesis del continuo. (Si aceptáramos dicha hipótesis, la conclusión sería trivial)

[4]En el lenguaje del álgebra: consideramos el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

[5]Ponemos la plabra "construido" entre comillas pues precisamente esta demostración que emplea de modo esencial el axioma de elección es un ejemplo paradigmático de demostración no constructiva.

Fijamos una numeración del conjunto de los números racionales: $\mathbb{Q} = (q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (lo cual es posible dado que $\mathbb{Q}$ es numerable), y consideramos los conjuntos trasladados de V por números racionales :

$$V_k = V + q_k$$

Notamos que:

$$E \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$$

Pues si $x \in E$, entonces $x \simeq v$ para algún $v \in V$, dado que V contiene un elemento en cada clase de equivalencia. Luego $x - v \in \mathbb{Q}$, es decir $x - v = q_k$ para algún k y por consiguiente $x \in V_k$.

Si V fuera medible, cada V_k sería medible y $m(V_k) = m(V)$ (por la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue). Por lo tanto, por la σ-subatividad:

$$m(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(V_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(V) \tag{1.7}$$

Si $m(V) = 0$, resultaría que $m(E) = 0$ contra la hipótesis. Queda pues analizar qué sucede si $m(V) > 0$.

Por otra parte si fuera $m(V) > 0$, $D(V)$ debería contener un intervalo de la forma $(-\delta, \delta)$ para algún $\delta > 0$, en virtud del teorema 1.14.2.

Pero por la definición de V, tenemos que

$$D(V) \cap \mathbb{Q} = \{0\}$$

Esto es una contradicción, dado que por la densidad de los racionales en el intervalo $(-\delta, \delta)$ hay infinitos números racionales.

Este absurdo provino de suponer que V era medible. En consecuencia V no puede ser medible. □

Observación 1.15.2 *El mismo argumento muestra que cualquier subconjunto medible del conjunto de Vitali mide cero*[6]*.*

Nota sobre esta demostración: La construcción de conjuntos no medibles depende de manera esencial del axioma de eleccción. El matemático Robert Solovay consiguió construir en [Sol70] un modelo de la teoría de conjuntos (de Zermelo-Fraenkel) en el que no vale el axioma de elección para familias arbitrarias de conjuntos, pero en el que todo conjunto es medible. (Se trata de una prueba de consistencia relativa: si la teoría de Zermelo- Fraenkel tiene un modelo, es posible construir otro modelo en que todo conjunto sea medible Lebesgue).

El teorema 1.14.1 fue demostrado por H. Steinhaus en [Ste20].

Nota sobre la bibliografía: Existen diversas presentaciones de la teoría de la medida en la Bibliografía. Además de la construcción geométrica que hemos seguido

[6] Esto dice que la medida interior, definida como $m_i(V) = \sup\{m(F) : F \subset V, F \text{ cerrado }\}$, del conjunto de vitali es nula.

(ver los libros de Fava y Zó [FZ96], y Wheeden y Zygmund [WZ77]), existen otros procedimientos más abstractos que permiten construir la medida (y la integral) de Lebesgue.

Por ejemplo, podemos mencionar la del clásico libro de Halmos [Hal50] (que se apoya en la definición de Carathéodory de los conjuntos medibles, que permite formular un teorema de extensión de medida en el contexto de las álgebras y σ-álgebras de conjuntos), o la de Rudin [Rud87] (que introduce primero la medida en un espacio abstracto, y desarrolla a partir de allí toda la teoría de la integración, para después recién obtener la medida de Lebesgue; a partir de un teorema de F. Riesz que representa las funcionales lineales continuas sobre el espacio de funciones continuas con soporte compacto, como integrales con respecto a una medida). Estas últimas presentaciones son ciertamente interesantes para profundizar en el estudio del tema, pero creo que son demasiado abstractas para una primera aproximación.

Finalmente, cabe mencionar la presentación de F. Riesz-Sz. Nagy [RSN90], en la que se recorre el camino inverso del que seguimos nosotros: construye primero la integral de Lebegue utilizando una aproximación por funciones continuas de soporte compacto, que son integrables en el sentido de Riemann, para después introducir la medida de Lebesgue a partir de ella.

El libro de Billingsley [Bil95] contiene una interesante presentación de la teoría, motivada desde la teoría de probabilidades.

Capítulo 2

Funciones Medibles e Integral en espacios abstractos

Nota: En mis cursos anteriores de análisis real (en 2007 y 2009) vimos primero los conceptos de función medible e integral en $\mathbb{R}^d$, y después su generalización al contexto de espacios de medida abstractos. En $\mathbb{R}^d$, la integral puede definirse geométricamente (para funciones no negativas) como medida del conjunto bajo el gráfico de la función, como pueden vern en los libros de Fava y Zó [FZ96], o de Wheeden y Zygmund [WZ77].

En estas notas, desarrollamos estos conceptos directamente en el marco de un espacio abstracto. Adopté este enfoque en el curso de 2017, ya que ahora se asume que los alumnos cursaron la materia *Probabilidades y Estadística*, y por eso ya están familiarizados con los espacios de probabilidad abstractos.

2.1. Álgebras y σ-álgebras de conjuntos

Sea Ω un conjunto al que llamaremos el espacio. Sus elementos serán llamados puntos del espacio. En lo sucesivo consideraremos solamente conjuntos que sean subconjuntos de Ω.

Definición 2.1.1 *Una colección de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$[$\mathcal{P}(\Omega)$: partes de Ω) se llama un álgebra de conjuntos si:*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$, *entonces* $A^c = \Omega - A \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$, *entonces* $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Corolarios:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ $(\Omega = \emptyset^c)$

2. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$ (pues por la ley de De Morgan, $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$)
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A - B \in \mathcal{A}$ $[A - B = A \cap B^c]$.

Ejemplo: Los conjuntos elementales de $\mathbb{R}^d$ forman un álgebra.

Definición 2.1.2 *Un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ que es cerrada bajo uniones numerables se llama una σ-algebra. Es decir un álgebra $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra si para cualquier sucesión infinita (A_n) de conjuntos de $\mathcal{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*

Corolario 2.1.3 *Una σ-álgebra es cerrada bajo intersecciones numerables. O sea si (A_n) es una sucesión infinita de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$*

Ejemplo 1: Los conjuntos medibles Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ forman una σ-álgebra.
Ejemplo 2: $\{\emptyset, \Omega\}$ es una σ-álgebra. $\mathcal{P}(\Omega)$ es una σ-álgebra.
Ejemplo 3: Sea $\mathcal{A}$ la colección de los $A \subset \Omega$ tales que A es numerable o A^c es numerable. $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra.

Observacion: La intersección de una familia arbitraria de álgebras (σ-álgebras) de subconjuntos de Ω es un álgebra (σ -álgebra). En particular dada una colección $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ podemos considerar la intersección de todas las álgebras (σ-algebras) que contienen a $\mathcal{C}$ (Hay por lo menos una: $\mathcal{P}(\Omega)$). El álgebra (σ-álgebra) así obtenida se llama el álgebra (σ- álgebra) generada por $\mathcal{C}$.

Definición 2.1.4 *La σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^d$ es la σ-álgebra generada por los abiertos. Sus elementos se denominan* **conjuntos borelianos**. [1]

Ejemplo: Los conjuntos cerrados son conjuntos borelianos. También lo son los conjuntos de clase F_σ y de clase G_δ.
El álgebra (σ-álgebra) generada por $\mathcal{C}$ está caracterizada por ser la más pequeña álgebra (σ-álgebra) que contiene a $\mathcal{C}$.

2.2. Medidas sobre un álgebra de conjuntos

Definición 2.2.1 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de conjuntos. Una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se llama una* **medida** *(positiva) si:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *μ es σ-aditiva, es decir: para cualquier sucesión $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ cuya unión $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ pertenezca a $\mathcal{A}$ se cumple que:*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

[1] Más generalmente, podríamos definir los conjuntos bolerianos si Ω es además de un espacio medible, un espacio métrico o topológico en el que los abiertos son medibles, lo que sucede en muchas aplicaciones de la teoría de la medida.

Ejemplo 1: Sea $\mathcal{A}$ la σ -álgebra de los conjuntos medibles Lebesgue y μ la medida de Lebesgue. Entonces las condiciones 1) y 2) se cumplen.

Ejemplo 2: Sea Ω un conjunto cualquiera, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, y

$$\mu(A) = \begin{cases} \#(A) \text{ (cantidad de elementos de A) siA es finito} \\ +\infty \text{ si } A \text{ es infinito} \end{cases}$$

μ se llama medida de contar. Es trivialmente una medida.

Ejemplo 3: Sea $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales no negativos. Pongamos

$$\mu(A) = \sum_{n\in A} a_n$$

Es fácil ver que μ es una medida. Recíprocamente toda medida sobre $\mathbb{N}$ es de esta forma.

Corolario 2.2.2 *Una medida es finitamente aditiva.*

Demostración: Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una sucesión de conjuntos disjuntos de $\mathcal{A}$ cuya unión $A = \bigcup_{k=1}^n A_k$ pertenezca a $\mathcal{A}$ entonces pongamos $A_k = \emptyset$ para $k > n$, y resulta: $A = \bigcup_{k=0}^\infty A_k \Rightarrow \mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$pues $\mu(A_k) = \mu(\emptyset) = 0$ para $n >$k. □

Corolario 2.2.3 *Una medida positiva es creciente*

Demostración: Si $A \subseteq B(A, B \in \mathcal{A}$, entonces

$$B = A \cup (B - A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \geq \mu(A)$$

(Notar que $B - A \in \mathcal{A}$). □

Corolario 2.2.4 *Una medida positiva es σ-subaditiva: Si $AyA_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ son conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$ tales que*

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty A_n \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$$

Demostración: Podemos formar una nueva sucesión B_k de conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$ poniendo:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$B_3 = A_3 - A_1 \cup A_2$$

y en general:

$$B_k = A_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$$

Los conjuntos B_k están en $\mathcal{A}$, son disjuntos y se tiene que:

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

Por otra parte, para todo k, $B_k \subset A_k$, entonces:

$$\mu(B_k) \leq \mu(A_k)$$

y se tiene que:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A \cap B_k)$$

donde la unión es disjunta. Luego:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

□

En lo sucesivo: trabajaremos en el siguiente contexto abstracto. Consideramos un conjunto Ω y una σ-álgebra $\mathcal{M}$ de subconjuntos de Ω. Al par $(\Omega, \mathcal{M})$ lo llamamos **espacio medible**. A los cojuntos de $\mathcal{M}$ los llamaremos **conjuntos medibles** (representará la clase de aquellos conjuntos a los que asignaremos medida). Si fijamos una medida $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, a la terna $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ la llamaremos **espacio de medida**.

Las propiedades de continuidad de la medida que vimos en la sección 1.11, continuan valiendo en el contexto abstracto, sin más que adaptar la notación:

Teorema 2.2.5 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles*

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$$

y

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

Entonces

$$\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$$

Teorema 2.2.6 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles*

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots \supset E_n \supset E_{n+1} \supset \ldots$$

y

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$$

Entonces si $\mu(E_{n_0}) < +\infty$ para algún n_0,

$$\mu(E) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n)$$

2.3. Funciones Medibles

Posteriormente definiremos la integral de una función con respecto a una medida. Las funciones que vamos a integrar deberán satisfacer una condición técnica, a saber que podamos medir ciertos conjuntos asociados a la función.

Definición 2.3.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible y sea $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Diremos que f es una* **función medible** *(respecto a la σ-álgebra $\mathcal{M}$) si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{f > \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > \alpha\}$ es medible, es decir pertenece a $\mathcal{M}$.*

Observación 2.3.2 *La **función característica**[2] de un conjunto $E \subset \Omega$ se define por:*

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in E \\ 0 & si \quad \omega \notin E \end{cases}$$

Entonces χ_E es medible si y sólo si $E \in \mathcal{M}$ (esto es: si E es medible).

Observación 2.3.3 *El ejemplo clásico es $\Omega = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{M}=$ conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. En este caso, las funciones respecto a la σ-álgebra $\mathcal{M}$ reciben el nombre de funciones medibles en el sentido de Lebesgue. En ese caso, cualquier función continua $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ será medible, pues si f es continua $\{f > \alpha\}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^d$ y por lo tanto medible.*

La noción de función medible puede formularse de varias maneras equivalentes. (En lo sucesivo, usaremos las notaciones abreviadas $\{f < \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < \alpha\}$, etcétera).

Lema 2.3.4 *Sea $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Son equivalentes:*

i) f es medible.

ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{f \geq \alpha\}$ es medible.

[2] En la teoría de probabilidades se denomina indicador, ya que el término función caracterísitica tiene en dicho contexto otro significado.

iii) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{f < \alpha\}$ *es medible.*

iv) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{f \leq \alpha\}$ *es medible.*

Demostración: $i) \Rightarrow ii)$:

$$\{f \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f > \alpha - 1/n\}$$

Como f es medible, cada uno de los conjuntos $\{f > \alpha - 1/n\}$ pertenece a $\mathcal{M}$, y como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, es cerrada por intersecciones numerables. Concluimos que $\{f \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$.

$ii) \Rightarrow iii)$: Notamos que $\{f < \alpha\} = \Omega - \{f \geq \alpha\}$, y como $\mathcal{M}$ es cerrada por complementos, $\{f < \alpha\} \in \mathcal{M}$.

$iii) \Rightarrow iv)$: Escribimos

$$\{f \leq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f < \alpha + 1/n\}$$

y utilizamos que $\mathcal{M}$ es cerrada por intersecciones numerables.

$iv) \Rightarrow i)$: Notamos que $\{f > \alpha\} = \Omega - \{f \leq \alpha\}$, y utilizamos que $\mathcal{M}$ es cerrada por complementos. □

Proposición 2.3.5 *Sean* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *funciones medibles. Entonces:* $\{f < g\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}$ *es medible.*

Demostración: Notamos que

$$\{f < g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{f < q < g\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$$

y usamos que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que $\mathbb{Q}$ es numerable. □

El hecho de que la σ-álgebra $\mathcal{M}$ sea cerrada por operaciones conjuntísticas numerables, tendrá como consecuencia que la clase de funciones medibles será cerrada por las operaciones algebraicas, y por las operaciones de tomar supremo o límites. Más precisamente tenemos las siguientes propiedades:

Lema 2.3.6 *Sean* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ *funciones medibles Entonces:*

i) $f + k$ *y* kf *son medibles para todo* $k \in \mathbb{R}$.

ii) $f + g$ *y* $f - g$ *son medibles.*

iii) f^2 *es medible.*

iv) $f \cdot g$ *es medible,*

v) Si $g \neq 0$, f/g *es medible.*

Demostración: i): $\{f+k > \alpha\} = \{f > \alpha-k\}$ Si $k > 0$: $\{kf > \alpha\} = \{f > \alpha/k\}$ mientras que si $k < 0$: $\{kf > \alpha\} = \{f < \alpha/k\}$

ii): $\{f+g > \alpha\} = \{f > \alpha - g\}$ y $\alpha - g$ es medible por i)

iii): Si $\alpha \geq 0$, $\{f^2 > \alpha\} = \{f > \sqrt{\alpha}\} \cup \{f < -\sqrt{\alpha}\}$ (sino $\{f^2 > \alpha\} = \Omega$).

iv): Se deja como ejercicio (por iii) basta ver que $1/g$ es medible) $\square$

Observación: El lema se puede adaptar al caso en que f o g toman los valores $\pm\infty$. $f+g$ está bien definida, salvo cuando es de la forma $(+\infty)+(-\infty)$ o $(-\infty)+\infty$. Para definir $f \cdot g$, hay que utilizar las convenciones $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$

Lema 2.3.7 *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles. Entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \qquad \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$$

son medibles.

En particular si f_n converge, entonces:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

es medible.

Demostración: Notamos que

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \lambda\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n > \lambda\}$$

Por lo que si cada f_n es medible, $\{f_n > \lambda\} \in \mathcal{M}\ \forall\, n \in N$, y en consecuencia como $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) > \lambda\} \in \mathcal{M}$. Esto prueba que $\sup_n f_n(x)$ es medible.

Del mismo modo, se prueba que $\inf_n f_n(x)$ es medible, ya que:

$$\{\inf_{n\in N} f_n(x) < \lambda\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n < \lambda\}$$

Para probar que $\limsup f_n$ es medible, notamos que

$$\limsup f_n = \inf_k \sup_{k\geq n} f_n$$

Pero para cada k, $\sup_{k\geq n} f_n$ es medible por lo que ya probamos, y en consecuencia $\limsup f_n$ es medible. De modo análogo, de que

$$\liminf f_n = \sup_k \inf_{k\geq n} f_n$$

Se deduce que $\liminf f_n$ es medible. Finalmente notamos que si la sucesión (f_n) converge, entonces $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \liminf f_n(x) = \limsup f_n(x)$, por lo que la función límite de las f_n es medible. $\square$

En general, no es cierto que la composición de dos funciones medibles sea una función medible. (Un ejemplo se da en la práctica 3). Para poder formular un resultado positivo en este sentido, introducimos la clase de funciones medibles borel:

Definición 2.3.8 *Sea $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que φ es medible Borel si es medible con respecto a la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, generada por los intervalos. Es decir si para todo intervalo $(a, b]$, su pre-imagen por φ, $\varphi^{-1}((a, b])$ es un conjunto boreliano de la recta.*

Lema 2.3.9 *Sean $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Entonces f es medible si y sólo si $f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ para todo $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demostración: Notamos que:

$$\mathcal{A} = \{B \subset R : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$$

es una σ-álgebra. Si f es medible, entonces $\mathcal{A}$ contiene a los intervalos. Por lo tanto contiene a toda la σ-álgebra de Borel (que es la menor σ-álgebra que contiene a los intervalos). $\square$

Corolario 2.3.10 *Si $(\Omega, \mathcal{M})$ es un espacio medible, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces $\varphi \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ es medible.*

Demostración: Sea B un boreliano de la recta, entonces $\varphi^{-1}(B)$ es boreliano, y en consecuencia como f es medible:

$$(\varphi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{M}$$

Como esto vale para todo B boreliano, concluimos que $\varphi \circ f$ es medible. $\square$

2.3.1. Funciones Semicontinuas

Supongamos que además de ser un espacio de medida, Ω es un espacio métrico (o topológico). Podemos entonces considerar la clase de las funciones semicontinuas.

Definición 2.3.11 *Si Ω es un espacio métrico (o topológico) y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función. Diremos que Ω es semicontinua inferiormente si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{f > \alpha\}$ es abierto. Diremos que f es semicontinua superiormente si ara todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{f < \alpha\}$ es abierto.*

Observación 2.3.12 *Existen otras maneras de definir la noción de función semi-continua. Por ejemplo si (Ω, d) es un espacio mérico, la semicontinuidad superior equivale a que*

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

para todo $x_0 \in \Omega$, y la semicontinuidad inferior a que:

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x)$$

para todo $x_0 \in \Omega$. También es posible formularlo en términos de una definición $\varepsilon - \delta$. Pero la defnición anterior será la más útil para nuestros propósitos inmediatos.

Una consecuencia inmediata es:

Observación 2.3.13 *En un espacio donde todo abierto es medible, toda función semi-continua es medible. En particular, si $\Omega = \mathbb{R}^d$ cualquier función semicontinua es medible borel.*

2.4. Funciones Simples

Definición 2.4.1 *Llamamos función simple a una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$ que toma un número finito de valores $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Podemos representarla entonces como:*

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \tag{2.1}$$

donde $E_i = \{\omega \in \Omega : f(\omega) = c_i\}$, y χ_{E_i} es la **función característica** *de E_i*

$$\chi_{E_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & si \quad \omega \in E_i \\ 0 & si \quad \omega \notin E_i \end{cases}$$

El siguiente lema de aproximación por funciones simples, será de gran utilidad para la teoría de la integral:

Lema 2.4.2 *Si $f : \Omega \to [0, +\infty]$ es una función medible no negativa, entonces existe una sucesión $\varphi_n(x)$ de funciones simples no negativas tales que*

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi_n(x) = f(x) \; \forall \, x \in \Omega$$

Demostración: Para cada $n \in N$, definimos:

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}}(x) + nF_n$$

siendo

$$E_{n,i} = \left\{ x \in \Omega : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}$$
$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\}$$

Es decir que:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{si} \quad \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \\ n & \text{si} \quad f(x) \geq n \end{cases}$$

Se prueba facilmente que $\varphi_n(x)$ tiene las propiedades del enunciado. $\square$

2.5. La convergencia en casi todo punto y el teorema de Severini-Egorov

Definición 2.5.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $f_n, f : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Diremos que $f_n(x)$ converge a $f(x)$* **en casi todo punto** *$x \in \Omega$ (con respecto a μ) si*

$$\mu(\{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\} = 0$$

Teorema 2.5.2 (Severini-Egorov) *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida tal que $\mu(\Omega) < +\infty$.*

Supongamos que tenemos una sucesión de funciones medibles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : \Omega \to \mathbb{R}$ que converge en casi todo punto de Ω (con respecto a μ) hacia una función medible $f(x)$.

Entonces, dado $\delta > 0$, existe un subconjunto medible $E_\delta \subset \Omega$ tal que f_n converge uniformemente a f en E_δ, y $\mu(E_\delta^c) < \delta$.

Nota: Aunque este teorema se conoce generalmente por el nombre de teorema de Egorov, por el matemático ruso Dimitry Egorov que lo publicó en 1911 [Ego11], el matemático italiano Carlo Severini lo publicó independientemente en 1910, en [Sev10].

Demostración: Dados $j, k \in \mathbb{N}$ definimos los conjuntos

$$E_k^j = \left\{ x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \text{ para todo } n \geq k \right\}$$

Claramente cada E_k^j es medible pues:

$$E_k^j = \bigcap_{n\geq k} \left\{ x \in \Omega : |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j} \right\}$$

y las f_n y f son funciones medibles.

Observamos que cuanto mayor es k menos restrictiva es la condición que define E_k^j, es decir que la sucesión

$$E_1^j \subset E_2^j \subset \ldots \subset E_k^j \subset E_{k+1}^j \subset \ldots$$

es creciente. Por consiguiente, si llamamos

$$E^j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^j$$

tendremos que:

$$\lim_{k\to+\infty} \mu(E_k^j) = \mu(E^j)$$

En consecuencia, para cada j podemos elegir un $k_0 = k_0(j)$ de manera que

$$\mu(E^j - E^j_{k_0}) < \frac{\delta}{2^j}$$

Hecha esta elección, pongamos

$$E_\delta = \bigcap_{j=1}^{\infty} E^j_{k_0(j)}$$

Es claro que E_δ es medible. Notamos que si $x \in E_\delta$, entonces $x \in E^j_{k_0(j)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, por consiguiente existe un $k_0 = k_0(j)$ tal que si $j \geq k_0(j)$ se tiene que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{j}$$

Como j es arbitrario, esto prueba que $f_n(x)$ converge uniformemente a para $x \in E_\delta$.

Nos queda estimar $\mu(-E^c_\delta)$. Ahora bien, por la ley de De Morgan:

$$E^c_\delta = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(E^j_{k_0(j)}\right)^c \tag{2.2}$$

Pero

$$\left(E^j_{k_0(j)}\right)^c \subset \left(E^j\right)^c \cup \left(E^j - E^j_{k_0(j)}\right) \tag{2.3}$$

y se tiene que

$$\left(E^j\right)^c \subset \{x \in \Omega : f_n(x) \not\to f(x)\}$$

pues si $x \notin E^j$, para todo k existirá un $j \geq k$ tal que $|f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}$. Por consiguiente, $\mu(\Omega - E^j) = 0$, ya que por hipótesis que que f_n converge a f en casi todo punto de Ω.

Entonces por (2.3) tenemos que:

$$\mu\left(\left(E^j_{k_0(j)}\right)^c\right) \leq \mu\left(\left(E^j\right)^c\right) + \mu(E^j - E^j_{k_0(j)}) = 0 + \mu(E^j - E^j_{k_0(j)}) < \frac{\delta}{2^j}$$

y utilizando (2.2) y la σ-subaditividad de la medida, deducimos que:

$$\mu\left(E^c_\delta\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu\left(\left(E^j_{k_0(j)}\right)^c\right) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^j} = \delta$$

como queríamos ver. □

En muchas situaciones, necesitamos considerar un espacio que es a la vez un espacio métrico (o topológico [3]) y un espacio de medida. La siguiente definición establece una condición de compatibilidad entre ambas estructuras:

[3] Los espacios topológicos son una generalización de los espacios métricos, donde no está necesariamente definida una métrica, sino una topología: esto es una colección τ de partes de E con las siguientes propiedades: i) $\emptyset \in \tau, E \in \tau$, ii) τ es cerrada por intersecciones finitas. iii) τ es cerrada por uniones arbitrarias. Entonces por definición los abiertos de E son los elementos de τ.

Definición 2.5.3 *Sea Ω un espacio métrico (o topológico). Una medida μ definida en una σ-álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ se dice regular si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Los abiertos del espacio Ω pertenecen a $\mathcal{M}$, por consiguiente:*

$$\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}$$

   donde σ-álgebra $\mathcal{B}(E)$ denota la σ-álgebra de subconjuntos de E generada por los abiertos (σ-álgebra de Borel).

   Esta condición implica que las funciones $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continuas (o semicontinuas), resultan medibles (respecto a la σ-álgebra $\mathcal{M}$).

2. *Se cumple que*

$$\mu(B) = \sup\{K \subset B : K \text{ es compacto}\} = \inf\{U \supset B : U \text{ es abierto}\} \quad \forall\, B \in \mathcal{M}$$

Por ejemplo, la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ es una medida regular.

Corolario 2.5.4 *Si la medida μ es regular, en el teorema de Egorov (teorema 2.5.2), E_δ puede tomarse compacto.*

Demostración: Por el teorema 2.5.2 (cambiando δ por $\delta/2$) podemos encontrar $E_\delta \subset E$ tal que

$$\mu(E - E_\delta) < \frac{\delta}{2}$$

y $f_n(x) \to f(x)$ uniformemente para $x \in E_\delta$.

Pero entonces, por la regularidad de μ podemos encontrar un compacto $K_\delta \subset E_\delta$ tal que $\mu(E_\delta - K_\delta) < \frac{\delta}{2}$.

Entonces, $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ en K_δ, y se tiene

$$\mu(E - K_\delta) \leq \mu(E - E_\delta) + \mu(E_\delta - K_\delta) < \delta$$

Esto prueba que en el enunciado, podemos suponer que E_δ es compacto, cuando μ es regular (sustituyendo a E_δ por K_δ). $\square$

2.5.1. Teorema de Lusin

Teorema 2.5.5 *Dado un conjunto medible $E \subset \mathbb{R}^d$ y una función $f : E \to \Re$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *f es medible.*

ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $F \subset E$ con $m(E - F) < \varepsilon$ tal que $f_{|F}$ (esto es: f restingida a F) es continua.*

2.6. Convergencia en medida

Definición 2.6.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida $(f_n)_{n\to N} : \Omega \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles finitas en casi todo punto. Se dice que (f_n)* **converge en medida** *a la función medible X si para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que*

$$\mu\{|f - f_n| > \varepsilon\} \to 0 \text{ cuando } n \to +\infty$$

Notación:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

Observación: Si (f_n) converge en medida a f, cualquier subsucesión de (f_n) también converge en medida a f.

Veamos algunas propiedades de la convergencia en medida:

Proposición 2.6.2 (Unicidad del límite) *Si $f_n \xrightarrow{\mu} f$ y $f_n \xrightarrow{\mu} g$, entonces $f = g$ en casi todo punto con respecto a μ.*

Demostración: Por la desigualdad triangular,

$$|f - g| \leq |f - f_n| + |f_n - g|$$

Entonces

$$\mu\{|f - g| > \varepsilon\} \leq \mu\{|f - f_n| > \varepsilon/2\} + \mu\{|f_n - g| > \varepsilon/2\}$$

Deducimos que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\mu\{|f - g| > \varepsilon\} = 0$$

Como

$$\{f \neq g\} = \bigcup_{n\in N} \left\{|f - g| > \frac{1}{n}\right\}$$

Por la σ-subaditividad de μ, deducimos que:

$$\mu(\{f \neq g\}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(\left\{|f - g| > \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$$

□

Definición 2.6.3 *Una sucesión de funciones medibles $(f_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ finitas en casi todo punto, se dice de Cauchy en medida o fundamental en medida si para cada $\delta > 0$,*

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \delta\}) \to 0$$

cuando $n, m \to +\infty$.

Teorema 2.6.4 (Riesz) *Si (f_n) es de Cauchy en medida, entonces existe una subsucesión (f_{n_k}) que converge hacia una función finita en casi todo punto de Ω. Además la sucesión entera converge en medida a la misma función límite.*

Demostración: Como (f_n) es de Cauchy en medida para cada $k \in \mathbb{N}$ existe otro entero n_k tal que:

$$\mu(\{x \in \Omega : |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-k}\}) < 2^{-k} \text{ si } n, m \geq n_k$$

Obviamente podemos suponer que $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, con lo que queda determinada la sucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Y si llamamos E_k al conjunto

$$E_k = \{x \in \Omega : |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \geq 2^{-k}\},$$

tendremos que $\mu(E_k) < 2^{-k}$. Consideramos entonces el conjunto:

$$N = \limsup E_k = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$$

Para cada i, N está contenido en el conjunto $\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$, de donde se deduce que:

$$\mu(N) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{i-1}}$$

por lo tanto deducimos que $\mu(N) = 0$. Si $x \notin N$, existe un entero i tal que $x \notin \bigcup_{k=i}^{\infty} E_k$, y por lo tanto si $k \geq i$,

$$|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}$$

Esto implica que la serie

$$f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) + \ldots + (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + \ldots$$

cuyas sumas parciales forman la sucesión

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots, f_{n_k}(x), \ldots$$

es absolutamente convergente si $x \notin N$. Podemos definir entonces una función

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f_{n_k}(x) \text{ si } x \notin N$$

y f_{n_k}(x) converge a $f(x)$ si $x \notin N$.

Si completamos la definición de f poniendo

$$f(x) = \limsup_{n \to +\infty} f_n(x) \; \forall \, x \in \Omega$$

Entonces f es medible, y $f_{n_k}(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto[4]

[4] Si estuviéramos trabajando con la σ-álgebra y la medida de Lebesgue podríamos completar la definición de f definiéndola en los puntos de N de cualquier manera, y obtendríamos una función medible. Pero esto no es cierto si se trabaja con una medida no completa (para la que que no valga que un subconjunto de un conjunto de medida nula es medible). Por eso optamos por completar su definición como el límite superior de las $f_n(x)$.

A continuación probaremos que la subsucesión f_{n_k} que hemos construido converge en medida a f. Notamos que también tenemos que si $x \notin N$,

$$f(x) = f_{n_k}(x) + (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + (f_{n_{k+2}}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \ldots$$

en consecuencia:

$$f(x) - f_{n_k}(x) = (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)) + (f_{n_{k+2}}(x) - f_{n_{k+1}}(x)) + \ldots$$

Dado $\delta > 0$ elegimos i_0 tal que $\frac{1}{2^{i_0-1}} < \delta$. Entonces:

$$\{x \in \Omega : |f(x) - f_{n_i}(x)| \geq \delta\} \subset N \cup \left(\bigcup_{k=i}^{\infty} E_k \right) \text{ si } i \geq i_0$$

pues si $x \notin N$ y $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}(x)| < 2^{-k}$ para todo $k \geq i$, se deduce de lo anterior que

$$|f(x) - f_{n_i}(x)| \leq \sum_{k=i}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \text{ si } i \geq i_0$$

En consecuencia:

$$\mu\left(\{x \in \Omega : |f(x) - f_{n_i}(x)| > \delta\}\right) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{i-1}} < \delta \text{ si } i \geq i_0$$

Esto prueba que la subsucesión (f_{n_k}) que hemos construido converge en medida a f.

Finalmente demostraremos que toda la sucesión (f_n) converge en medida a f, para ello volveremos a utilizar la hipótesis de que (f_n) es de Cauchy en medida. Como consecuencia de la desigualdad triangular, tenemos que:

$$\{|f(x) - f_n(x)| > \delta\} \subset \left\{ |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{\delta}{2} \right\} \cup \left\{ |f_{n_k}(x) - f_n(x)| > \frac{\delta}{2} \right\}$$

y en consecuencia:

$$\mu\left(\{|f(x) - f_n(x)| > \delta\}\right) \leq$$
$$\mu\left(\left\{ |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{\delta}{2} \right\} \right) + \mu\left(\left\{ |f_{n_k}(x) - f_n(x)| > \frac{\delta}{2} \right\} \right)$$

El primer término es menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ eligiendo $k \geq k_0(\varepsilon)$ pues f_{n_k} converge en medida a f, y el segundo término también es menor $\frac{\varepsilon}{2}$ si $k, n_k \geq n_1(\varepsilon)$ [notamos que $n_k \geq k$] pues (f_n) es de Cauchy en medida. En conseguncia si $k \geq \text{máx}(n_0, n_1)$,

$$\{|f(x) - f_n(x)(x)| > \delta\} < \varepsilon$$

Esto demuestra que f_n converge en medida a f. □

Corolario 2.6.5 *Si la sucesión $f_n(x)$ converge en medida a $f(x)$, existe una subseción $f_{n_k}(x)$ que converge a $f(x)$ en casi todo punto.*

2.7. La Integral de Lebesgue en Espacios de Medida

Consideramos ahora un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es decir un espacio medible, donde además está definida una medida (σ-aditiva) $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$.

Queremos definir la integral de f con respecto a la medida μ. Lo haremos en tres etapas:

1. Integral de funciones simples no negativas.
2. Integral de funciones medibles no negativas.
3. Integral de funciones medibles que pueden cambiar de signo.

2.7.1. Integral de Funciones Simples No Negativas

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una función simple no negativa, representada por (2.1) definimos su integral de la siguiente manera:

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i)$$

En esta definición, hacemos el convenio de que si $\mu(E_i) = +\infty$ para algún i, la interpretamos así:

- Si $c_i \neq 0$, entonces $c_i \cdot \mu(E_i) = +\infty$ (y en consecuencia la suma da por resultado $+\infty$)
- Mientras que si $c_i = 0$ entonces $c_i \cdot \mu(E_i) = 0$. (y este término puede omitirse en la suma)

Este convenio está de acuerdo con el significado geométrico de la integral, y es importante para la validez de los teoremas que veremos a continuación.

La integral de las funciones simples no negativas tiene las siguientes propiedades, que pueden verificarse fácilmente:

Proposición 2.7.1

1. *linealidad: Si f y g son funciones simples no negativas:*

$$\int_\Omega (f+g) \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu$$

Si f es una función simple, y k una constante:

$$\int_\Omega (kf) \, d\mu = k \int_\Omega f \, d\mu$$

2. *Monotonía: si f y g son funciones simples no negativas y $f \leq g$, entonces:*

$$\int_\Omega f \, d\mu \leq \int_\Omega g \, d\mu$$

2.7.2. Integral de funciones no negativas

Definición 2.7.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, y $f : \Omega \to [0, +\infty]$ una función medible no negativa. Definimos la integral de f de la siguiente manera:*

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \left\{ \int_\Omega \varphi \, d\mu : 0 \leq \varphi \leq f, \ \varphi \text{ simple} \right\}$$

Una consecuencia inmediata de la definición es la siguiente:

Proposición 2.7.3 *Si $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ son funciones medibles no negativas tales que $f \leq g$, entonces*

$$\int_\Omega f(x) \, d\mu \leq \int_\Omega g(x) \, d\mu$$

Definición 2.7.4 *Si $A \in \mathcal{M}$ es un conjunto medible, y $f : \Omega \to [0, +\infty]$ es una función medible no negativa, definimos la integral de f sobre A como:*

$$\int_A f \, d\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_A \, d\mu$$

Lema 2.7.5 *Sea φ una función simple no negativa. Entonces la función $\lambda = \lambda_\varphi : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ definida por:*

$$\lambda(A) = \int_A \varphi \, d\mu$$

es una medida.

Demostración: Supongamos que un conjunto medible A se representa como una unión disjunta numerable de una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos medibles:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Queremos probar que:

$$\lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Como φ es una función simple, podremos representarla en la forma

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{E_i}$$

siendo E_i conjuntos medibles disjuntos.

Notamos que $\varphi(x)\chi_{A_n}(x)$ es una función simple, que toma el valor c_i en el conjunto $A_n \cup E_i$, es decir que su representación canónica es:

$$\varphi(x)\chi_{A_n}(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \, \chi_{E_i \cap A_n}(x)$$

En consecuencia,

$$\lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \ \mu(E_i \cap A_n)$$

Y por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{N} c_i \ \mu(E_i \cap A_n)$$

Como en esta suma doble los términos $\mu(E_i \cap A_n)$ son no negativos, da lo mismo efectuar la suma en cualquier orden. En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{n=1}^{\infty} c_i \ \mu(E_i \cap A_n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_n)$$

Ahora notamos que:

$$E_i \cap A = \bigcup_{n \in N} (E_i \cap A_n)$$

siendo esta unión disjunta. En consecuencia, como μ es una medida,

$$\mu(E_i \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_n)$$

y concluimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \sum_{i=1}^{N} c_i \ \mu(E_i \cap A) = \int_{\Omega} \varphi(x) \ \chi_A(x) \ d\mu = \int_A \varphi(x) \ d\mu$$

□

Teorema 2.7.6 (Teorema de la Convergencia Monótona) [5] *Sea $f_n(x) : \Omega \to [0, +\infty]$ una sucesión creciente (o sea: $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$) de funciones medibles no negativas. Entonces,*

$$\int_{\Omega} \lim_{n \to +\infty} f(x) \ d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) \ dmu$$

Demostración: Sea

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

Por la monotonía de la integral es claro que:

$$\int_{\Omega} f_n(x) \ d\mu \leq \int_{\Omega} f(x) \ d\mu$$

[5] También conocido como teorema de Beppo Levi.

Y por lo tanto que:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu \leq \int_\Omega f(x)\, d\mu$$

Por otra parte, sea φ una función simple tal que $\varphi \leq f$. Dado $\alpha \in (0,1)$, consideramos los conjuntos (medibles)

$$A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$$

Entonces la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente (o sea $A_n \subset A_{n+1}$) y

$$\Omega = \bigcup_{n \in N} A_n$$

Además la función λ_φ definida en el lema anterior, es una medida, por lo tanto:

$$\lambda(\Omega) = \lim_{n \to +\infty} \lambda(A_n)$$

es decir,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} \varphi(x)\, d\mu = \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu$$

Por otra parte, para cada $n \in N$,

$$\alpha \int_{A_n} \varphi(x)\, d\mu \leq \int_{A_n} f_n(x)\, d\mu \leq \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

De modo que,

$$\alpha \int_\Omega \varphi(x)\, d\mu = \alpha \lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} \varphi(x) d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

Haciendo tender α a 1 deducimos que:

$$\int_\Omega \varphi(x)\, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu$$

y por lo tanto como esto vale para toda función simple φ con $0 \leq \varphi \leq f$, por la definición de integral, deducimos que:

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, d\mu$$

□

Observación 2.7.7 *Tomemos $\Omega = [0,1]$ y $\mu = m$ (medida de Lebesgue). Consideremos las funciones simples no negativas*

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{[0,1/n]}$$

cuyo límite puntual es la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ +\infty & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Vemos que

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

pero

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

Este ejemplo muestra que la conclusión del teorema 2.7.6 puede no valer si la convergencia no es monótona.

Proposición 2.7.8 (Linealidad de la integral) *Si $f, g : \Omega \to [0, +\infty]$ son funciones medibles no negativas y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ son números reales no negativos, entonces:*

$$\int_\Omega [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\, d\mu = \lambda_1 \int_\Omega f(x)\, d\mu + \lambda_2 \int_\Omega g(x)\, d\mu$$

Demostración: Utilizamos el lema de aproximación por funciones simples: sabemos que existen una sucesión creciente $(f_n(x))$ de funciones simples que converge a $f(x)$, y una sucesión creciente $(g_n(x))$ de funciones simples que converge a $g(x)$. Entonces por la linealidad de la integral de funciones simples,

$$\int_\Omega [\lambda_1 f_n(x) + \lambda_2 g_n(x)]\, d\mu = \lambda_1 \int_\Omega f_n(x)\, d\mu + \lambda_2 \int_\Omega g_n(x)\, d\mu$$

Y el teorema de convergencia monótona implica entonces que:

$$\int_\Omega [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\, d\mu = \lambda_1 \int_\Omega f(x)\, d\mu + \lambda_2 \int_\Omega g(x)\, d\mu$$

□

Teorema 2.7.9 (Lema de Fatou) *Sea $f_n : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ una sucesión de funciones medibles no negativas. Entonces:*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\, d\mu \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

Demostración: Llamemos

$$f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \sup_{k\in N} \left(\inf_{n\geq k} f_n(x) \right)$$

y consideremos la sucesión creciente de funciones no negativas:

$$g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x)$$

Entonces por el teorema de convergencia monótona:

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \int_\Omega \lim_{k \to +\infty} g_k(x)\, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega g_k(x)\, d\mu \tag{2.4}$$

Por otra parte si $n \geq k$, tenemos que

$$\int_\Omega g_k(x)\, d\mu \leq \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

y en consecuentcia:

$$\int_\Omega g_k(x)\, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

Y por lo tanto:

$$\lim_{k \to +\infty} \int_\Omega g_k(x)\, d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

En consecuencia utilizando (2.4), deducimos que:

$$\int_\Omega f(x) d\mu \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n(x)\, d\mu$$

□

2.7.3. Funciones Integrables

Si $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función medible, hacemos la descomposición:

$$f = f^+ - f^- \tag{2.5}$$

como diferencia de dos funciones medibles no negativas, siendo

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

y

$$f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

Notamos que:

$$|f| = f^+ + f^-$$

Definición 2.7.10 *Diremos que una función medible $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ es integrable si son finitas las integrables*

$$\int_\Omega f^+(x)\, d\mu$$

y

$$\int_\Omega f^-(x)\, d\mu$$

En ese caso, definimos la integral de f con respecto a μ en el espacio Ω por:

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu = \int_\Omega f^+(x)\, d\mu + \int_\Omega f^-(x)\, d\mu$$

Observación: De la definición de función integrable, deducimos que f es integrable si y sólo si

$$\int_\Omega |f(x)| d\mu < +\infty$$

Además:

$$\left| \int_\Omega f(x) d\mu \right| \leq \int_\Omega |f(x)|\, d\mu$$

Proposición 2.7.11 (Linealidad de la integral) *Si $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ son funciones integrables y λ_1, λ_2 son números reales, entonces $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ es integrable, y se tiene que:*

$$\int_\Omega [\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x)]\, d\mu = \lambda_1 \int_\Omega f(x)\, d\mu + \lambda_2 \int_\Omega g(x)\, d\mu$$

Demostración: Primero probaremos que es posible sacar escalares de la integral: En efecto si $\lambda > 0$, tenemos que:

$$(\lambda f)^+ = \lambda f^+$$

$$(\lambda f)^- = \lambda f^-$$

Entonces es claro por la definición y la linealidad de la integral para funciones no negativas, que si f es integrable, λf también lo es y se verifica que:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \lambda f\, d\mu &= \int_\Omega (\lambda f)^+\, d\mu - \int_\Omega (\lambda f)^-\, d\mu \\ &= \lambda \int_\Omega f^+\, d\mu - \lambda \int_\Omega f^-\, d\mu \\ &= \lambda \int_\Omega f\, d\mu \end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, notamos que:

$$(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^-$$
$$(\lambda f)^- = (-\lambda) f^+$$

y de nuevo, vemos usando la definición y la linealidad de la integral para funciones no negativas, que si f es integrable, λf también lo es y se verifica que:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \lambda f \, d\mu &= \int_\Omega (\lambda f)^+ \, d\mu - \int_\Omega (\lambda f)^- \, d\mu \\ &= -\lambda \int_\Omega f^- \, d\mu + \lambda \int_\Omega f^+ \, d\mu \\ &= \lambda \int_\Omega f \, d\mu\end{aligned}$$

(El caso $\lambda = 0$ es trivial porque la integral de la función nula dá 0).

Ahora probaremos que la integral distribuye la suma: Para ello notamos que (2.5) proporciona una escritura de f como diferencia de dos funciones no negativas. Pero que si tenemos otra escritura de f como diferencia de dos funciones medibles no negativas:

$$f = f_1 - f_2$$

Entonces de $f^+ - f^- = f_1 - f_2$, deducimos $f^+ + f_2 = f_1 + f^-$, entonces por la linealidad de la integral para funciones no negativas:

$$\int_\Omega f^+ \, d\mu + \int_\Omega f_2 \, d\mu = \int_\Omega f_1 \, d\mu + \int_\Omega f^- d\mu$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega f_1 \, d\mu - \int_\Omega f_2 \, d\mu$$

Vale decir que si en lugar de (2.5), utilizáramos cualquier otra descomposición de f como diferencia de funciones medibles no negativas obtendríamos el mismo valor de la integral.

Hecha esta observación, notamos que

$$f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

y que esta última expresión proporciona una escritura de $f + g$ como diferencia de funciones no negativas. En consecuencia, por la observación anterior, y la linealidad de la integral para funciones no negativas:

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g) \, d\mu &= \int_\Omega (f^+ + g^+) \, d\mu - \int_\Omega (f^- + g^-) \, d\mu \\ &= \int_\Omega f^+ \, d\mu + \int_\Omega g^+ \, d\mu - \int_\Omega f^- d\mu - \int_\Omega g^- \, d\mu = \\ &= \int_\Omega f \, d\mu + \int_\Omega g \, d\mu\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.12 (De convergencia mayorada, de Lebesgue) *Sea $f_n(x) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones integrables, que converge puntualmente a una función $f(x)$*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

y tal que existe una función integrable g de modo que $|f_n(x)| \leq g$ (en casi todo punto con respecto a la medida μ). Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu = 0$$

En particular,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x) \, d\mu = \int_\Omega f(x) \, d\mu$$

Demostración: Sea $h_n(x)$ la sucesión de funciones medibles no negativas, definida por:

$$h_n(x) = 2g(x) - |f_n(x) - f(x)|$$

Entonces, por el lema de Fatou,

$$\begin{aligned} 2\int_\Omega g(x) \, d\mu &= \int_\Omega \lim h_n(x) \, d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega h_n(x) \, d\mu \\ &= 2\int_\Omega g(x) \, d\mu - \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu = 0$$

y en particular

$$\left| \int_\Omega f_n(x) \, d\mu - \int_\Omega f(x) \, d\mu \right| \leq \int_\Omega |f_n(x) - f(x)| \, d\mu \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

$\square$

Observación 2.7.13 *Cuando $\Omega = \mathbb{N}$ y μ es la medida de contar, una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ no es otra cosa que una sucesión. En este ejemplo, todas las funciones son medibles, puedes la σ-álgebra $\mathcal{M}$ está formada por todas las partes de $\mathbb{N}$. La integral*

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu$$

coincidirá con la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$$

siempre que sea absolutamente convergente (que es la condición para que f sea integrable con respecto a μ). Esta observación permite aplicar los teoremas de convergencia anteriores a las series absolutamente convergentes.

2.8. Comparación con la intergral de Riemann

En esta sección buscaremos comparar la integral de Riemann con la de Lebesgue. Más específicamente probaremos el teorema siguiente:

Teorema 2.8.1 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ sí y sólo si f es continua en casi todo punto (es decir: su conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero en el sentido de Lebesgue). En ese caso, la integral de Riemann con la integral de Lebesgue.*

Para demostrar este teorema, necesitamos recordar previamente los conceptos fundamentales de la teoría de la integral de Riemann.

Dada una función $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada, para cada partición π del intervalo $[a, b]$ en subintervalos (i.e. particiones de la forma $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$) se definen las *sumas inferior* y *superior* de Riemann por las fórmulas

$$s_\pi(f) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{y} \qquad S_\pi(f) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

donde

$$m_i := \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{y} \qquad M_i := \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

Se definen a continuación las *integrales inferior* y *superior* de Riemann como

$$I_R(f) = \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b] \text{ en subintervalos}\}$$

$$S_R(f) = \inf\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición de } [a, b] \text{ en subintervalos}\}.$$

Por último, decimos que f es *Riemann integrable* si las integrales inferior y superior de Riemann coinciden. En tal caso se define la integral de Riemann de f como

$$\int_a^b f(x)\, dx := I_R(f) = S_R(f).$$

Definimos también la norma de una partición π como el máximo de las longitudes de los intervalos en dicha partición:

$$\|\pi\| = \max_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

Tenemos el siguiente criterio de integrabilidad en el sentido de Riemann (que se ve en cursos anteriores)

Proposición 2.8.2 *f es Riemann integrable en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición π del intervalo $[a, b]$ por subintervalos tal que $S_\pi(f) - s_\pi(f) < \varepsilon$*

Podemos interpretar las sumas inferior $s_\pi(f)$ y superior $S_\pi(f)$ como integrales (en el sentido de Lebesgue) de funciones en escalera (funciones simples que son constantes en intervalos). En esfecto si definimos

$$g_\pi = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$$

$$h_\pi = \sum_{i=1}^{n} M_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$$

Entonces

$$s_\pi(f) = \int_a^b g_\pi(x)\, dx$$

$$S_\pi(f) = \int_a^b h_\pi(x)\, dx$$

Definimos las envolventes superior $M(x)$ e inferior $m(x)$ de Baire por

$$M(x) = \inf_{\delta>0} \sup_{|x-y|<\delta} f(y)$$

$$m(x) = \sup_{\delta>0} \inf_{|x-y|<\delta} f(y)$$

(En esta definición, consideramos puntos $x, y \in [a, b]$.)

La siguiente proposición resume sus propiedades:

Proposición 2.8.3

1. *Si f es acotada, m y M son finitas en todo punto. Además $m(x) \leq f(x) \leq M(x)$.*
2. *f es conitnua en un punto $x_0 \in [a, b]$ si y sólo si $m(x_0) = M(x_0)$*
3. *m es semicontinua inferiormente y M es semicontinua superiormente. En particular, M y m son medibles.*

Demostración:

Veamos que M es semicobntinua superiormente, es decir que el conjunto $A_\lambda = \{x \in [a, b] : M(x) < \lambda\}$ es abierto (relativo al intervalo $[a, b]$). Si $M(x_0) < \lambda$, entonces por la defnición de $M(x)$, existirá un $\delta_0 > 0$ tal que

$$\sup_{|x_0-y|<\delta_0} f(y) < \lambda$$

Entonces si $x \in [a, b] \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ existirá un $\delta' > 0$ tal que

$$(x - \delta', x + \delta') \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

y por lo tanto

$$\sup_{|x-y|<\delta'} f(y) < \lambda$$

Se deduce que

$$M(x) < \lambda$$

Por lo tanto $[a, b] \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A_\lambda$. Como lo hicimos con cualquier x, probamos que M es semicontinua superiormente. Análogamente se prueba que m es semicontinua inferiormente. □

Finalmente necesitamos un lema:

Lema 2.8.4 *Sea (π_k) una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que su norma tienda a cero. Entonces*

$$g_{\pi_k}(x) \to m(x)$$

$$h_{\pi_k}(x) \to M(x)$$

en todo de $[a, b]$ que no sea un punto de subdivisión de ninguna partición π_k. En particular, en casi todo punto.

Aplicando el teorema de convergencia mayorada, obtenemos

Corolario 2.8.5

$$I_R(f) = \int_a^b m(x)\, dx$$

$$S_R(f) = \int_a^b M(x)\, dx$$

Finalmente observamos que entonces f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ si y sólo si

$$\int_a^b [M(x) - m(x)]\, dx = 0$$

Como el integrando es no negativo, esto ocurre si y sólo si $m(x) = M(x)$ en casi todo punto, es decir si f es continua en casi todo punto.

Además, en dicho caso $f(x) = m(x) = M(x)$ en casi todo punto, luego f es medible, y la integral de f coincide con la de $m(x)$ y $M(x)$ en el sentido de Lebesgue. Se deduce que la integral de Lebesgue coincide en este caso con la de Riemann.

El teorema 2.8.1 se generaliza sin otra dificultad que la de adaptar la notacional a integrales de funciones acotadas en intervalos de $\mathbb{R}^d$ con $d > 1$.

2.8.1. Intergrales impropias

En los cursos elementales de análisis se consideran también integrales de funciones no acotadas o en intervalos infinitos, habitualmente denominadas "integrales impropias". Consideremos por ejemplo, integrales en una semirrecta $[a, +\infty)$.

Definición 2.8.6 *Supongamos que $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función tal que f es acotada e integrable en el sentido de Riemann en cada intervalo compacto $[a, b]$ con $a < b$. Entonces, decimos que la integral*

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

existe como integral impropia en el sentido de Riemann-Cauchy, si existe el siguiente límite (que es por definición el valor de la integral en este sentido)

$$(RC) \int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

En la teoría de Lebesgue, las integrales impropias absolutamente convergentes pueden considerarse como integrales en el sentido ordinario. Más precisamente, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.8.7 *En las condiciones de la definición anterior, si*

$$(RC) \int_a^\infty |f(x)| < +\infty$$

entonces f es integrable en el sentido de Lebesgue en el intervalo $[a, \infty)$ y su integral de Lebesgue coincide con su valor como integral impropia.

Demostración: Consideremos cualquier suceción b_n que tienda en forma monótona creciente a $+\infty$. □

2.9. La Interpretación Probabilística

Los conceptos desarrollados en este capítulo tienen una interpretación natural en el contexto de la teoría de probabilidades. Para una exposición detallada, vean mis notas de la materia *probabilidades y estadística.*

- Un **espacio de probabilidad** es simplemente un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ donde $P(\Omega) = 1$. Los elementos de la σ- álgebra $\mathcal{E}$ se denominan eventos. Corresponden a sucesos que pueden ocurrir o no cuando se realiza el experimento aleatorio que queremos modelar. Si E es un evento, la medida $P(E)$ representa la probabilidad asignada a dicho evento.

- Una **variable aleatoria** es una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Representa un número asociado a la realización de un experimento aleatorio. Por ejemplo: el resultado de una medición.

  Cabe mencionar que en el contexto del análisis real, se piensa generalmente la medibilidad como una condición meramente técnica. Dicha condición es necesaria para la validez de los resultados, pero todas funciones que aparecen en la práctica verifican. Sin embargo, en la teoría de probabilidades este concepto adquiere una nueva dimensión: las σ-álgebras se usan para representar la información disponible (por ejemplo en un instante de tiempo dado, en el contexto de la teoría de procesos estocásticos). Entonces las funciones medibles son aquellas cuyo valor puede determinarse con la información disponible.

- En particular, las funciones simples corresponden a **variables aleatorias discretas** que toman sólo un número finito de valores.

- La integral de una variable aleatoria respecto a la medida P es lo que en la teoría de probabilidades se denomina la **esperanza matemática** de dicha variable. Representa un promedio de dicha variable, ponderado de acuerdo a las probabilidades asignadas.

- La noción de convergencia en medida se denomina en el contexto probabilístico **convergencia en probabilidad.**

Capítulo 3

Construcción de medidas

3.1. Medidas Exteriores

En este capítulo, queremos describir un general procedimiento para construir medidas. Recordamos que para cosntruir la σ-álgbera y la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$, partimos de la noción de medida exterior. Ahora generalizaremos esta construcción a espacios abstractos.

Definición 3.1.1 *Una medida exterior μ^* es una función de $\mathcal{P}(X)$ (el conjunto de partes de X) en $[0, \infty]$ con las siguientes propiedades:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. *μ^* es creciente: si $A \subset B$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^* * (B)$*
3. *μ^* es σ-subaditiva: para cualquier sucesión $E_k \subset X$ se cumple:*

$$\mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

Constantin Carathéodory probó que en $\mathbb{R}^d$ vale la siguiente propiedad:

Teorema 3.1.2 *$E \subset \mathbb{R}^d$ es medible Lebesgue si y sólo si para todo conjunto S se cumple que:*

$$m_e(S \cap E) + m_e(S \cap E^c) = m_e(S)$$

($m_e(S)$ es la medida exterior de Lebesgue de S, E^c es el complemento de E) Basándose en esto propuso tomar esta propiedad como definición en el caso de la medida abstracta:

Definición 3.1.3 *Diremos que un conjunto $E \subset X$ es μ^*-medible (o simplemente medible) si para cualquier conjunto $S \subset X$ se cumple:*

$$\mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c) = \mu^*(S)$$

Equivalentemente: E es medible si y sólo si para todo $A \subset E$ y todo $B \subset E^c$, se tiene que:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Observación 3.1.4 *Como $S = SE \cup SE^c$ tenemos:*

$$\mu^*(S) \leq \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$$

luego para ver que E es medible basta ver que:

$$\mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c) \leq \mu^*(S)$$

(para todo $S \subset X$) Esto basta verlo cuando $\mu^*(S) < +\infty$.

Notación: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mu^*}$ es la clase de los conjuntos μ^*-medibles.

Corolario 3.1.5 $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ *($\emptyset$ es medible)*

Observación 3.1.6 *Si E es medible, también lo es su complemento. (Esto está claro ya que E y E^c intervienen simétricamente en la definición)*

Proposición 3.1.7 *La intersección de dos conjuntos medibles es medible (por lo tanto $\mathcal{M}_\mu$ es un álgebra de conjuntos)*

Demostración: Sean EyF medibles. Queremos ver $E \cap F$ es medible. Tenemos que:

$$(E \cap F)^c = (E \cap F^c) \cup (E^c \cap F) \cup (E^c \cap F^c)$$

luego, para cualquier $S \subset X$ tenemos:

$$\mu^*(S \cap E \cap F) + \mu^*(S \cap (E \cap F)^c)$$
$$\leq \mu^*(S \cap E \cap F) + \mu^*(S \cap E \cap F^c)$$
$$+\mu^*(S \cap E^c \cap F) + \mu^*(S \cap E^c \cap F^c)$$

por ser μ^* sub-aditiva. Pero como F es medible:

$$\mu^*(S \cap E \cap F) + \mu^*(S \cap E \cap F^c) = \mu^*(S \cap E)$$

Similarmente:

$$\mu^*(S \cap E^c \cap F) + \mu^*(S \cap E^c \cap F^c) = \mu^*(SE^c)$$

Luego,

$$\mu^*(S \cap (E \cap F)) + \mu^*(S \cap (E \cap F)^c) \leq \mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c)$$

Pero como Ees medible, $\mu^*(S \cap E) + \mu^*(S \cap E^c) = \mu^*(S)$, luego tenemos:

$$\mu^*(S \cap (E \cap F)) + \mu^*(S \cap (E \cap F)^c) \leq \mu^*(S)$$

y como ésto vale para todo $S \subset X$, concluimos que $E \cap F$ es medible. □

Lema 3.1.8 *Si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son conjuntos medibles disjuntos, entonces para cualquier conjunto $S \subset X$ se tiene:*

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) = \mu^*\left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right)$$

Demostración: Se prueba por inducción sobre n. Si $n = 1$ es trivial. Si $n > 1$ y lo suponemos válido para $n-1$ conjuntos medibles disjuntos vamos a probar que también vale para n. Separando el término con $k = n$, y utilizando la hipótesis inductiva, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) = \mu^*\left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) + \mu^*(S \cap E_n)$$

Sea E el conjunto:

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$$

entonces: $E \cap E_n = E_n$ y

$$E \cap E_n^c = \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k$$

(ya que los E_k son disjuntos), luego:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) = \mu^*(S \cap E \cap E_n) + \mu^*(S \cap E \cap E_n^c) = \mu^*(S \cap E)$$

por ser E_n medible, o sea:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) = \mu^*\left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right)$$

como afirma el lema. □

Lema 3.1.9 *$\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra.*

Demostración: Basta probar que es cerrada bajo uniones numerables disjuntas:

Sea (E_k) una sucesión conjuntos de $\mathcal{M}_\mu$ y pongamos: $B_1 = E_1$ $B_k = E_k - \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i$ entonces los $B_k \in \mathcal{M}_\mu$ (pues ya sabemos $\mathcal{M}_\mu$ es un álgebra), son disjuntos y tenemos que

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$$

Como toda unión numerable de medibles, se puede reescribir como una unión numerable disjunta de medibles bastará entonces probar que $\mathcal{M}_\mu$ es cerrada bajo uniones numerables disjuntas.

Sea pues (E_k) una sucesión de conjuntos de $\mathcal{M}_{\mu}$ disjuntos. Vamos a probar que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ también pertenece a $\mathcal{M}_{\mu^*}$. En virtud del lema anterior, para cualquier $S \subset X$:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) + \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right)^c \right)$$

$$= \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \right) + \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right)^c \right) = \mu^*(S)$$

ya que $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ es medible ($\mathcal{M}_{\mu^*}$ es un álgebra).
Como por otra parte:

$$S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \subset S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right)^c$$

Tenemos,

$$\mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right) \subset \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right)^c \right)$$

Luego obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(S \cap E_k) + \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right) \leq \mu^*(S)$$

Cuando $n \to \infty$ resulta la desigualdad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^* \left(S \cap E_k \right) + \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right) \leq \mu^*(S)$$

Tenemos que:

$$\mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right) \right) + \mu^* \left(S \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(S \cap E_k) + \mu^* \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \right)^c \right) \leq \mu^*(S)$$

por la σ-subaditividad de μ^*, luego como vale para todo $S \subset X$ resulta que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es medible. $\square$

Lema 3.1.10 *μ^* restringida a $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una medida.*

Demostración: Sólo falta ver que es σ-aditiva. Sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ domde los E_k son disjuntos. Entonces:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

pues μ^* es σ -subaditiva. Por otra parte, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(E_k) = \mu^* \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k \right) \leq \mu^*(E)$$

Haciendo que $n \to \infty$ obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) \leq \mu^*(E)$$

Como probamos las dos desigualdades opuestas, vale la igualdad. $\square$

3.2. Medidas exteriores métricas

Definición 3.2.1 *Sea (X, d) un espacio métrico y sea μ^* una medida exterior definida en X. Decimos que μ^* es una medida exterior métrica, o que satisface la condición de Carathéodory, si*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

siempre que $d(A, B) > 0$.

Teorema 3.2.2 *Si μ^* es una medida exterior métrica en (X, d), entonces cualquier conjunto boreliano de X es μ^* medible. Es decir:*

$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{M}_{\mu^*}$$

Además definimos la σ-álgebra de Borel de X como la σ-álgebra generada por los conjuntos abiertos.

Demostración: Dado que $\mathcal{M}_{\mu^*}$ es una σ-álgebra, es suficiente probar que todo cerrado de X es μ^* medible.

Sea pues $F \subset X$ un conjunto cerrado, y $E \subset X$ arbitrario. Hemos de probar que:

$$\mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c) \leq \mu^*(E)$$

Para ello, llamamos $B = E \cap F$ y $C = E \cap F^c$, e introduzcamos los conjuntos

$$C_n = \left\{ x \in C : d(x, F) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

de modo que los conjuntos C_n forman una sucesión creciente, $d(C_n, F) \geq \frac{1}{n}$ y

$$C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

En virtud de la condición de Carathéodory, tenemos que:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(B \cup C) \geq \mu^*(B \cup C_n) = \mu^*(B) + \mu^*(C_n)$$

Luego, bastará probar que: $\mu^*(C_n) \to \mu^*(C)$, o dado que C_n es creciente, que

$$\mu^*(C) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu^*(C_n)$$

Llamemos $D_n = C_{n+1} - C_n$. Afirmamos que $d(D_{n+1}, C_n) > 0$, si ambos son no vacíos.

Para verlo, supogamos que $x \in D_{n+1}$ y que $y \in C_n$, entonces como $x \not\in\in C_{n+1}$, $d(x, F) \leq \frac{1}{n+1}$, y como $y \in C_n$, $d(y, F) \leq \frac{1}{n}$, entonces como $d(y, F) \leq d(x, F) + d(x, y)$ resulta que: $d(x, y) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$

Entonces, utilizando la condición de Caratheodory extendda inductivamente, tenemos que:

$$\mu^*(C_{2n+1}) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(D_{2k})$$

y que:

$$\mu^*(C_{2n}) \geq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(D_{2k-1})$$

Mientras que por la σ-subaditividad, tenemos que:

$$\mu^*(C) \leq \mu^*(C_{2n}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k-1})$$

Si alguna de las series

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k}), \quad \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k-1})$$

diverge, entonces se sigue de las dos primeras ecuaciones que

$$\lim_{n\to+\infty} \mu^*(C_n) = +\infty$$

y la desigualdad buscada se verifica trivialmente.

Si esto no ocurre, dado $\varepsilon > 0$, podremos elegir $n_0 > 0$ tal que si $n \geq n_0$, se tenga que:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k}) < \varepsilon, \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(D_{2k-1}) < \varepsilon$$

En consecuencia,

$$\mu^*(C) \leq \lim_{n\to+\infty} \mu^*(C_n)$$

como afirmamos.

$\square$

3.3. Las medidas de Lebesgue-Stieltjes

Consideramos un intervalo de la recta $I = (a, b]$, y $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Stieltjes tuvo la idea de asociarle a F una noción generalizada de medida de un intervalo de la siguiente manera: a cada subintervalo $(c, d] \subset I$ semiabierto[1], le asignamos la longitud generalizada

$$\lambda_F\left((c, d]\right) = F(d) - F(c)$$

Notamos que esta noción generalizada de medida de un intervalo, es creciente y finitamente aditiva.

Stieltjes utilizó esta noción, para generalizar la integral de Riemann de esta manera: Si $\varphi \to I$ es una función, queremos definir la integral

$$\int_a^b \varphi(x)\, dF(x)\ (R-S) \tag{3.1}$$

Para ello, tomamos una partición $\pi : a = x_0 < x_1 < \ldots x_{n-1} < x_n = b$ de I y elegimos puntos intermedios[2] $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}]$. Consideramos las sumas de Riemann-Stieltjes

$$S_\pi(f, \varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)\lambda_F((x_i, x_{i+1}]) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\xi_i)(F(x_{i+1}) - F(x_i))$$

Si cuando la norma de la partición

$$|\pi| = \max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$$

tiende a cero, las sumas $S_\pi(f, \varphi)$ convergen a un límite I (independientemente de como hayamos elegido los puntos intermedios), decimos que la integral (3.1) existe, y que su valor es I. Se puede probar que la integral (3.1) existe si φ es continua y F es creciente[3].

Nuestra intención es generalizar esta noción de integral. Para ello nos preguntamos si existe alguna medida Λ_F, que corresponda la noción generalizada de medida λ_F de un intervalo. Para ello, imitando lo que hicimos antes con la medida de Lebesgue, comenzamos definiendo una medida exterior asociada a λ_F:

Definición 3.3.1 *Dado $E \subset I$, no vacío, definimos:*

$$\Lambda_F^*(E) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((c_n, d_n]) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} F(d_n) - F(c_n)$$

[1]En esta sección consideraremos siempre intervalos semiabiertos. Esto es importante, pues resultará que, a diferencia de lo que sucedía con la medida de Lebesgue, para la medida de Lebesgue-Stieltjes los puntos pueden tener medida positiva; con lo que el intervalo $(c, d]$ y el intervalo $[c, d]$ por ejemplo, pueden tener medidas diferentes.

[2]En realidad, estamos trabajando con particiones con puntos marcados.

[3]O más generalmente, de variación acotada.

donde la suma se toma sobre todos los posibles cubrimientos de E, por una familia de intervalos semiabiertos:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, d_n]$$

Ponemos $\Lambda_F^*(\emptyset) = 0$.

Teorema 3.3.2 Λ_F^* *es una medida exterior métrica.*

Demostración: Para comprobar que Λ_F^* es una medida exterior, hemos de demostrar que si

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

entonces:

$$\lambda_F^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_F^*(E_n) \tag{3.2}$$

Podemos suponer que $\Lambda_F^*(E_n) < +\infty$. Entonces, para cada n podemos considerar un cubrimiento

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$$

por intervalos semiabiertos $I_{n,k}$ tales que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F(I_{n,k}) \leq \Lambda_F^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Entonces:

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$$

y en consecuencia

$$\Lambda_F^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_F(I_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Lambda_F^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_F^*(E_n) + \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, se obtiene (3.2).

Finalmente, queda comprobar que si $d(E_1, E_2) > 0$, entonces $\Lambda_F^*(E_1 \cup E_2) = \Lambda_F^*(E_1) + \Lambda_F^*(E_2)$. Si $E = E_1 \cup E_2$, ya sabemos que $Lambda_F^*(E) \subset \Lambda_F^*(E_1) + \Lambda_F^*(E_2$. Queda pues demostrar que

$$\Lambda_F^*(E) \geq \Lambda_F^*(E_1) + \Lambda_F^*(E_2) \tag{3.3}$$

y para ello podemos suponer que $\Lambda_F^*(E) < +\infty$. Consideremos entonces un cubrimiento de E por intervalos semiabiertos:

$$E \subset \bigcup_{n=}^{\infty} I_n$$

tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(I_n) < \Lambda_F^*(E) + \varepsilon \tag{3.4}$$

Sea $\delta = d(E_1, E_2) > 0$. Subdividiendo si es necesario los intervalos I_n, podemos suponer que $|I_n| < \delta$ (por la subaditividad finita de λ_F, esta subdivisión no afectará la relación (3.4). Entonces ningún intervalo puede cortar simultáneamente a E_1 y E_2, y podemos separar la suma anterior, en los intervalos que cortan a E_1 y los que cortan a E_2 (los que no cortan a ninguno podemos descartarlos:

$$\sum_{n:I_n\cap E_1}^{\infty} \lambda_F(I_n) + \sum_{n:I_n\cap E_2}^{\infty} \lambda_F(I_n) + < \Lambda_F^*(E) + \varepsilon$$

pero los intervalos I_n que cortan a E_1, cubren a E_1 y los que cortan a E_2 cubren a E_2 (pues todos juntos cubrían a E). Luego, resulta

$$\Lambda_F^*(E_1) + \Lambda_F^*(E_2) < \Lambda_F^*(E) + \varepsilon$$

y siendo ε arbitrario, obtenemos (3.3). □

Dado que hemos demostrado que Λ_F^* es una medida exterior métrica, en virtud del teorema 3.2.2 todo subconjunto boreliano del intervalo I es Λ_F^*-medible. Si llamamos Λ_F a la restricción de Λ_F^* a los borelianos, vemos que es una medida definida sobre la σ-álgebra de Borel que siempre es finita.

Recíprocamente, es posible probar que toda medida de Borel (esto es definida en la σ-álgebra de Borel) finita en un intervalo $I = (a, b]$ de la recta, es de la forma Λ_F, donde $F(x) = \mu((a, x])$ es su función de distribución[4].

Nos queda comprobar que Λ_F^* exitende a λ_F. Para que ello sea cierto, necesitaremos hacer una hipótesis adicional: que F sea continua por la derecha.

Teorema 3.3.3 *Si F es creciente y continua por la derecha, se tiene que*

$$\Lambda_F^*(J) = \lambda_F(J) \tag{3.5}$$

para cualquier intervalo semiabierto $J \subset I$.

Observación: Sea $J = (c, d]$ un intervalo semiabierto, $J \subset I$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen intervalos semiabiertos K, L tales que

$$\overline{K} \subset J \subset L^\circ$$

y

$$\lambda_F(L) < \lambda_F(L) + \varepsilon$$

$$\lambda_F(K) > \lambda_F(L) - \varepsilon$$

[4] En el mismo sentido en que este concepto se emplea en la teoría de probabilidades. Incluso se puede generalizar al caso $I = (-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

(simplemente basta tomar $L = (c, d + \delta_1]$ donde δ_1 es el que corresponde a ε por la continuidad de F a la derecha en el punto d; y $K = (c + \delta_2, d]$ donde δ_2 es el que corresponde a ε por la continuidad a la derecha de F en el punto c).

En base a esta observación, podemos demostrar la σ-subaditividad de λ_F en la clase de los intervalos:

Lema 3.3.4 *Si un intervalo semiabierto $J \subset I$, está contenido en la unión de una familia numerable $J_n \subset I$ de subintervalor abiertos de I,*

$$J \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$$

entonce

$$\lambda_F(J) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(J_n)$$

Demostración: En virtud del lema, podemos encontrar un intervalo semiabierto K tal que $\overline{K} \subset J$, $\quad \lambda_F(K) > \lambda_F(J) - \varepsilon$ e intervalos semiabiertos L_n tales que

$$J_n \subset L_n^\circ, \quad \lambda_F(L_n) < \lambda_F(J_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Entonces

$$\overline{K} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L_n^\circ$$

y por compacidad de $\overline{K}$, existirá un n_0 tal que

$$\overline{K} \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} L_n^\circ$$

y en particular,

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} L_n$$

Entonces, como λ_F es finitamente subaditiva:

$$\lambda_F(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(L_n)$$

En consecuencia,

$$\lambda_F(J) - \varepsilon < \lambda_F(K) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(L_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_F(J_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(J_n) + \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, se obtiene el teorema. $\square$

Una vez demostrado este lema, estamos en condiciones de demostrar el teorema 3.3.3. Para ello, observamos que si $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de J por intervalos semiabiertos tenemos en virtud del lema,

$$\lambda_F(J) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F(J_n)$$

y al tomar ínfimo sobre todos los posibles cubrimientos de J obtenemos que:

$$\lambda_F(J) \leq \Lambda_F^*(J)$$

Por otro lado, J es en sí mismo un cubrimiento de J (podemos tomar $J_1 = J$, y $J_n = (a,a] = \emptyset$ para $n \geq 2$, si queremos que esté indexado por $\mathbb{N}$), con lo que

$$\lambda_F^*(J) \leq \lambda_F(J)$$

En consecuencia, se verifica (3.5).

Ejercicio: Probar que si $\varphi : (a,b] \to \mathbb{R}$ es continua entonces la integral de Riemann-Stieltjes (3.1) coincide con la integral respecto de la medida de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_a^b \varphi(x)\, d\Lambda_F(x)$$

3.4. El teorema de Extensión de Medidas

Presentaremos en esta sección una construcción que generaliza la que hicimos antes de las medidas de Lebesgue-Stieltjes, a un contexto más abstracto.

Definición 3.4.1 *Supongamos que μ es una medida definida sobre un álgebra de conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Queremos definir una medida exterior μ^* asociada a μ. Para ello, dado un conjunto $E \subset X$ definimos:*

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \quad \text{donde } E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ y los } A_k \in \mathcal{A} \right\}$$

donde para formar el ínfimo se consideran todas las formas de cubrir E por una cantidad numerable de conjuntos de E. l

Lema 3.4.2 *μ^* es efectivamente una medida exterior, y si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mu^*(A) = \mu(A)$,es decir μ^* restringida a los conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$ coincide con μ.*

Demostración: Probemos que μ^* es creciente: Supongamos que $A \subset B$.

Si $B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. donde los $B_k \in \mathcal{A}$, entonces $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$, luego por definición de $\mu^*(A)$ tenemos que:

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)$$

pero esto vale para cualquier cubrimiento de B por miembros del álgebra $\mathcal{A}$ luego por definición de $\mu^*(B)$ tenemos que: $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Probemos que μ^* es $\sigma - subaditiva$:
Dada una sucesión $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ queremos ver que:

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k)$$

Si para algún E_k se tiene $\mu^*(E_k) = +\infty$ no hay nada que probar. Podemos pues suponer $\mu^*(E_k)$ es finita para todo k. Dado entonces $\varepsilon > 0$ para cada k (por definición de $\mu^*(E_k)$) podemos encontar conjuntos $A_{kj} \in \mathcal{A}$ tales que:

$$E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{kj}$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{kj}) < \mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Entonces si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ tenemos que:

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{kj}$$

Es decir: tenemos un cubrimiento de E por una cantidad numerable de conjuntos del álgebra $\mathcal{A}$, entonces por definición de $\mu^*(E)$ tenemos que:

$$\mu^*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_{kj}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E_k) + \varepsilon$$

Como ε era arbitrario, haciendo que $\varepsilon \to 0$ se obtiene la desigualdad buscada.

Finalmente, probemos que μ^* extiende a μ: Si $A \in \mathcal{A}$ y $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ($A_k \in \mathcal{A}$), entonces

$$\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

por ser $\mu\sigma$-subaditiva. Como esto vale para cualquier cubrimiento de A por miembros de $\mathcal{A}$, de la definición de $\mu^*(A)$ resulta que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$

Por otra parte, un cubtimiento particular de A por miembros de $\mathcal{A}$ es

$$A = A \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots \cup \emptyset \cup \ldots$$

entonces

$$\mu^*(A) \leq \mu(A)$$

□

Corolario 3.4.3 $\mu^*(\emptyset) = 0$ *(pues $\emptyset \in \mathcal{A}$).*

Lema 3.4.4 $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_\mu$. *Es decir: todo conjunto del álgebra $\mathcal{A}$ es μ-medible.*

Si por analogía con $\mathbb{R}^N$, llamamos conjuntos elementales a los del álgebra, este enunciado dice que todo conjunto elemental es medible.

Demostración: Sea $S \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$, entonces $SA \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k \cap A$ (Como $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones $A_k \cap A \in \mathcal{A}$)

Análogamente $S \cap A^c \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k \cap A^c$ (donde $A_k \cap A^c \in \mathcal{A}$) por lo tanto:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap A) + \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k \cap A^c)$$

pero μ es una medida sobre $\mathcal{A}$, luego:

$$\mu^*(A_k \cap A) + \mu^*(A_k \cap A^c) = \mu(A_k)$$

por lo que obtenemos:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$$

pero como esto vale para cualquier cubrimiento de S resulta:

$$\mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c) \leq \mu^*(S)$$

Luego, A es medible. □

En resumen: hemos partido de la medida μ definida sobre un álgebra $\mathcal{A}$ y hemos construido la medida μ^* definida sobre la σ-álgebra $\mathcal{M}_\mu$ que coincide con μ en $\mathcal{A}$. Así hemos probado que toda medida sobre un álgebra se puede extender a una medida sobre una σ-álgebra que la contiene.

En particular si $\sigma(\mathcal{A})$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{A}$ tenemos $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_\mu$. Así pues, cualquier medida sobre un álgebra se puede extender a una medida sobre la σ-álgebra generada (La ventaja es que esta σ-álgebra no depende de la medida).

Nos preguntamos: ¿En qué condiciones podemos asegurar que la extensión sea única ?

Sea υ una medida sobre $\sigma(\mathcal{A})$ que coincide con μ en $\mathcal{A}$ (para todo $A \in \mathcal{A}$, $\upsilon(A) = \mu(A)$). ¿puede ser $\upsilon \neq \mu^*$ en $\sigma(\mathcal{A})$?

Sea $E \in \sigma(\mathcal{A})$. Si $E \subset \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ donde los $A_k \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\upsilon(E) \leq \sum_{k=1}^\infty \upsilon(A_k)$$

por ser υ σ-subaditiva. O sea,

$$\upsilon(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Como esto vale para cualquier cubrimiento de E por miembros de $\mathcal{A}$, concluimos que $\upsilon(E) \leq \mu^*(E)$

Sean $E \in \sigma(A)$, $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < +\infty$

$$\upsilon(A) = \upsilon(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A)$$

ya que A es medible. Pero como $A \in \mathcal{A}$, $\mu^*(A) = \mu(A)$, luego $\upsilon(A) \leq \mu(A)$

Si suponemos que $\mu^*(A \cap E)$ y $\mu^*(A \cap E^c)$ son finitas resulta:

$$\upsilon(A \cap E) \leq \mu^*(A \cap E)$$

$$\upsilon(A \cap E^c) \leq \mu^*(A \cap E^c)$$

Luego $\upsilon(A \cap E)$ y $\upsilon(A \cap E^c)$ son finitas, y además en realidad:

$$\upsilon(A \cap E) = \mu^*(A \cap E)$$

$$\upsilon(A \cap E^c) = \mu^*(A \cap E^c)$$

porque si por ejemplo fuera $\upsilon(A \cap E) < \mu^*(A \cap E)$ entonces:

$$\upsilon(A) = \upsilon(A \cap E) + \nu(A \cap E^c)$$

$$< \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \mu^*(A) = \mu(A)$$

contra la hipótesis de que μ y υ coinciden en $\mathcal{A}$ (ídem si fuera $\upsilon(A \cap E^c) < \mu^*(A \cap E^c)$)

(Nota: este razonamiento no es válido si intervienen valores infinitos: por ejemplo:

$$1 < +\infty, +\infty \leq +\infty; \text{ pero } 1 + (+\infty) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty)$$

Definición 3.4.5 *La medida $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ se llama σ-finita si existe una sucesión $(A_k) \subset \mathcal{A}$ tal que*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

con $\mu(A_k) < +\infty$ Es decir: μ es σ-finita si el espacio se descompone como la unión numerable de conjuntos de medida μ finita. Observación: se puede suponer que los A_k son disjuntos.

Ejemplo: La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$ es σ-finita.

Si suponemos que μ es σ-finita y (A_k) es una sucesión disjunta de conjuntos de $\mathcal{A}$ tales que

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ con } \mu(A_k) < +\infty$$

teneomos que:

$$\upsilon(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \upsilon(E \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_k) = \mu^*(E)$$

pues μ^* es una medida en $\sigma(\mathcal{A})$).

Como $A_k \cap E \subset A$, entonces

$$\mu^*(A_k \cap E) \leq \mu^*(A_k) = \mu(A_k)$$

y resulta que:

$$\mu^*(A_k \cap E) < +\infty$$

Análogamente:

$$\mu^*(A_k \cap E^c) < +\infty$$

Entonces, podemos aplicar el razonamiento anterior y concluir que: υ y μ^* coinciden en $\sigma(\mathcal{A})$ (en realidad en $\mathcal{M}_\mu$)

En definitiva, hemos probado el siguiente teorema de extensión de medidas:

Teorema 3.4.6 (Carathéodory-Hahn) *Toda medida sobre un álgebra de conjuntos se puede extender a una medida sobre la σ -álgebra generada. Si la medida es σ-finita dicha extensión es única.*

Capítulo 4

Espacios L^p

4.1. Funciones equivalentes

Sea $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Estamos interesados en la clase $\mathcal{F}$ de las funciones medibles medibles $f : E \to \mathbb{C}$. En el conjunto $\mathcal{F}$ introducimos la siguiente relación de equivalencia: $f \simeq g$ si $f(x) = g(x)$ en casi todo punto de E con respecto a la medida μ. Es decir si $\mu((E \in E : f(x) \neq g(x))) = 0.$. Facilmente se comprueba que $\simeq$ es efectivamente una relación de equivalencia. Es importante el hecho de que esta relación de equivalencia es compatible con las operaciones algebraicas con funciones:

Proposición 4.1.1 *Si $f_1 \simeq f_2$ y $g_1 \simeq g_2$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $f_1 + f_2 \simeq g_1 + g_2$
2. $f_1 \cdot f_2 \simeq g_1 . g_2$
3. $\lambda \cdot f_1 \simeq \lambda \cdot f_2$

Demostración: Probaremos por ejemplo la primera afirmación (Las otras son análogas):

$$\{f_1 + f_2 \neq g_1 + g_2\} \subset \{f_1 \neq g_1\} \cup \{f_2 \neq g_2\}$$

Como los conjuntos del segundo miembro tienen medida nula por hipótesis, lo mismo ocurre con el del primero. □

Por comodidad identificaremos (consideraremos iguales) a las funciones que son iguales en casi todo punto, y escribiremos $f = g$ en lugar de $f \simeq g$.

4.2. Norma p ($1 < p < \infty$)

Definición 4.2.1 *Sea $1 \leq p < \infty$ un número real. Dada una función $f \in \mathcal{F}$, definimos la* **norma** *p de f (sobre el espacio E) con respecto a la medida μ, o* *más brevemente la norma p de f por:*

$$\|f\|_p = \|f|_{L^p(E,\mu)} = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

Observación: puede ocurrir que $\|f\|_p = +\infty$ (cuando la integral valga $+\infty$) Observemos que si $f \simeq g$ entonces $\|f\|_p = \|g\|_p$ (Ya que dos funciones iguales en casi todo punto tienen la misma integral).

4.3. Norma Infinito

Definición 4.3.1 *Dada una función $f \in \mathcal{F}$ definimos su* **norma infinito** *por:*

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\{C \in \overline{\mathbb{R}} : |f(x)| \leq C \textit{ en casi todo punto } x \textit{ de } E \textit{ respecto de } \mu\}$$

Este ínfimo siempre existe como un elemento de la recta real extendida $\overline{\mathbb{R}}$, pudiendo valer eventualmente $+\infty$ (Notar que $C = +\infty$ es una de las posibles constantes). Si $\|f\|_\infty \neq +\infty$ podemos escribir:

$$\{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty) + \frac{1}{n} \right\}$$

De la definición de $\|f\|_\infty$ se sigue que los conjuntos del segundo miembro tienen medida nula. Por lo tanto el del primero también es decir:

$$| f | \leq \|f\|_\infty$$

en casi todo punto de E. Pero esto significa que $\|f\|_\infty$ es en realidad un elemento del conjunto sobre el que tomamos ínfimo, es decir es el mínimo de dicho conjunto:

$$\|f\|_\infty = \text{mín}\{C : |f(x)| \leq C \text{ en casi todo punto } x \text{ de } E \text{ respecto de } \mu\}$$

La norma infinito de f está caracterizada pues, por las siguientes propiedades:

1. $|f| \leq \|f\|_\infty$ en casi todo punto de E respecto de μ
2. Es la mínima constante con esta propiedad.

Nuevamente si $f \simeq g$, entonces $\| f \|_\infty = \| g \|_\infty$.

Notación: Una constante C tal que $\|f| \leq C$ en casi todo punto se llama una **cota superior esencial** de $|f|$. Las funciones de L^∞ se llaman **esencialmente acotadas**.

El siguiente teorema da una explicación del por qué del nombre “norma infinito”:

Teorema 4.3.2 *Si $\int_E |\ f\ |^p\ d\mu < +\infty$ para algún $p > 0$, entonces*

$$\|f\|_\infty = \lim_{q\to\infty} \|f\|_q$$

Demostración: Tenemos que:

$$\int_E |f|^q\ d\mu = \int_E |f|^{q-p} \cdot |f|^p\ d\mu \leq \|f\|_\infty^{q-p} \int_E |\ f\ |^p\ \ d\mu$$

pues $|f| \leq \|f\|_\infty$ en casi todo punto de E con respecto a μ. Elevando ambos miembros a la potencia $1/q$:

$$\|f\|_q \leq \|f\|_\infty^{1-p/q} \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/q}$$

Hacemos ahora que $p \to \infty$, y resulta:

$$\lim_{q\to\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty \tag{4.1}$$

Si $\|f\|_\infty = 0$ entonces $f = 0$ (en casi todo punto), $\|f\|_q = 0$ y el teorema es trivial. Podemos suponer pues que $\|f\|_\infty \neq 0$.

Ahora elegimos una constante c con $0 < c < \|f\|_\infty$ arbitraria, y consideramos el conjnto $A = \{x \in E : |f(x)| > c)$. Afirmamos que $0 < \mu(A) < +\infty$. Que $\mu(A) > 0$ está claro por la definición de la norma infinito. Si fuera $\mu(A) = +\infty$ se tendría:

$$\int_E |f|^p\ d\mu \geq \int_A |f|^p\ d\mu \geq \int_A c^p\ d\mu = c^p\ \mu(A) = +\infty$$

lo que contradice la hipótesis. Análogamente tenemos que:

$$\int_E |f|^q\ d\mu \geq \int_A |f|^q\ d\mu \geq \int_A c^q\ d\mu = c^q\ \mu(A)$$

Elevando ambos miembros a la potencia $1/q$:

$$\|f\|_q \geq\ c\ \mu(A)^{1/q}$$

y ahora hacemos que $q \to \infty$:

$$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \geq\ c$$

pero como esto vale para cualquier constante c con $0 < c < \|f\|_\infty$ resulta que:

$$\liminf_{q\to\infty} \|f\|_q \geq \|f\|_\infty \tag{4.2}$$

De las desigualdades (4.1) y (4.2) se sigue el teorema. □

4.4. Espacios L^p (o $L^p(E,\mu)$) $(1 \leq p \leq \infty)$

Llamamos L^p a la clase de las funciones con norma p finita.

$$L^p = \{f \in \mathcal{F} : \| f \|_p < +\infty\}$$

Es decir que:

$$f \in L^p \text{ si y sólo si } \int_E | f |^p \, d\mu < \infty$$

Observacion: L^p está en realidad formado por las clases de equivalencia respecto a la relación $\simeq$, pero como convenimos en considerar iguales a las funciones que están en la misma clase podemos pensar L^p como una clase de funciones.

Lema 4.4.1 *Si* $1 \leq p \leq \infty$, *entonces*

$$\|\lambda \cdot f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$$

Demostración: Probaremos primero el lema para $1 \leq p < \infty$:

$$\|\lambda \cdot f\|_p = \left(\int_E |\lambda \cdot f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_E |\lambda|^p \cdot |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

$$= |\lambda| \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} = |\lambda| \cdot \|f\|_p$$

Probemos ahora el lema cuando $p = \infty$. Tenemos:

$$|\lambda \cdot f| = |\lambda| \cdot |f| \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

en casi todo punto de $E[\mu]$, por lo tanto

$$\|\lambda \cdot f\|_\infty \leq |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

Por lo que $|\lambda| \cdot \| f \|_\infty$ es una constante que mayora a $|\lambda \cdot f|$ en casi todo punto y $\|\lambda \cdot f\|_\infty$ es, por definición, la mínima de tales constantes. □

Lema 4.4.2

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Demostración: Tenemos que:

$$|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

en casi todo punto de E respecto de μ. Notemos que $C = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ es entonces una constante tal que $|f+g| \ |\leq C$ en casi todo punto de E con respecot a μ, y por definición,

$$\|f+g\|_\infty$$

es la mínima de tales constantes, en consecunecia: $\|f+g\|_\infty \leq C$ Es decir:

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

□

Teorema 4.4.3 *Si $f, g \in L^p (1 \leq p \leq \infty)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces $f + g \in L^p y \lambda \cdot f \in L^p$. En otras palabras, L^p es un espacio vectorial sobre los números complejos.*

Demostración:

$$| \ f+g \ |^p \leq (| \ f \ | + | \ g \ |^p)^p \leq (2 \max(| \ f \ |, | \ g \ |))^p \leq 2^p \left(\max(| \ f \ |^p, | \ g \ |^p\right)$$

Por lo tanto,

$$| \ f+g \ |^p \leq 2^p \left(| \ f \ |^p + | \ g \ |^p\right)$$

Integrando miembro a miembro resulta:

$$\int_E | \ f+g \ |^p \ d\mu \leq 2^p \left(\int_E | \ f \ |^p \ d\mu + \int_E | \ g \ |^p \ d\mu \right)$$

Luego si las integrales del segundo miembro son finitas, también lo es la del primero. Luego si $f, g \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $f + g \in L^p$.
Que lo mismo vale para $p = \infty$ se deduce inmediatamente del 4.4.2.
Finalmente por el lema 4.4.1, si $\| \ f \ \|_p$ es finita $(1 \leq p \leq \infty)$ entonces $\| \ \lambda \cdot f \ \|_p$ también lo es, o sea si $f \in L^p$ entonces $\lambda \cdot f \in L^p$ □

Ejemplos:

1. El caso más frecuente es el siguiente: Consideramos $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible en el sentido de Lebesgue, y tomamos μ como la medida de Lebesgue (restringida a los subconjuntos medibles de E, que formarán la σ-álgebra $\mathcal{M}$).

   Por ej si $f(x) = x^\alpha$ y $E = [0, 1]$ tendremos que $f \in L^p([0, 1])$ si $p\alpha + 1 > 0$; mientras que si tomamamos $E = [1, +\infty]$, $f \in L^p([1, +\infty])$ cuando $p\alpha + 1 < 0$.

2. Otro ejemplo de utilidad es tomar E como un conjunto medible Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y

   $$\mu(A) = \int_A w(x) \ dx$$

siendo $w(x)$ una función medible no negativa (una función de peso) y $A \subset E$ medible. Se obtiene un espacio L^p "pesado" cuya norma es

$$\|f\|_{L^p(E,w(x)dx)} = \left(\int_E |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p}$$

3. Finalmente, otro ejemplo importante es el siguiente: tomamos $E = \mathbb{N}$ y como μ la medida de contar. El espacio $L^p(E, \mu)$ se suele designar por ℓ^p. Consisten en las sucesiónes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ con la norma

$$\|(a_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

4.5. Exponente Conjugado de p. Desigualdad de Hölder

Definición 4.5.1 *Para $1 \leq p \leq \infty$ definimos el exponente conjugado de p notado p', de la siguiente manera:*

- *Si $1 < p < \infty$ entonces $p' = \frac{p}{p-1}$*
- *Si $p = 1$ entonces $p' = \infty$*
- *Si $p = \infty$ entonces $p' = 1$*

Observacion:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Esta es una forma más simétrica de expresar la relación entre *py* p'.

Lema 4.5.2 (Desigualdad de Young) *Si $1 < p < \infty$, $a \geq 0$ y $b \geq 0$ entonces:*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

donde p' es el exponente conjugado de p.

Demostración: Para $a, b \geq 0$, definamos

$$Q(a,b) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - ab$$

queremos ver que $Q(a,b) \geq 0$. Notamos que Q tiene la siguiente propiedad de homogeneidad: si ponemos

$$\tilde{a} = \lambda^{1/p} a, \quad \tilde{b} = \lambda^{1/p'} b$$

con $\lambda > 0$, tenemos que

$$Q(\tilde{a}, \tilde{b}) = \lambda Q(a, b)$$

Notamos entonces que siempre podemos elegir λ de modo que $\tilde{b} = 1$ a menos que $b = 0$ (tomando $\lambda = b^{-p'}$), y que, en tal caso, $Q(a, b) \geq 0$ si y sólo si $Q(\tilde{a}, \tilde{b}) \geq 0$.

En consecuencia, bastará probar la desigualdad en los siguientes casos espaciales: cuando $b = 1$ y cuando $b = 0$.

Si $b = 1$,

$$Q(a, 1) = \frac{a^p}{p} + \frac{1}{p'} - a = F(a)$$

que es una función de una variable. Calculando su derivada:

$$F'(a) = a^{p-1} - 1$$

vemos que sólo se anula en $a = 1$, y que es negativa en $0 < a < 1$ y positiva si $a > 1$. En consecuencia $F(a)$ alcanza su mínimo en $a = 1$, y

$$Q(a, 1) = F(a) \geq F(1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} - 1 = 0$$

Si $b = 0$, tenemos

$$Q(a, 0) = \frac{a^p}{p} \geq 0$$

por lo que la desigualdad queda demostrada. $\Box$

Podemos demostrar ahora la desigualdad de Hölder, que es una de las más importantes del análisis:

Teorema 4.5.3 (Desigualdad de Hölder) *Si $1 \leq p \leq \infty$ y p' es su exponente conjugado:*

$$\int_E |f \cdot g| \, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_E |f|^{p'} \, d\mu \right)^{1/p'}$$

Es decir:

$$\int_E |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

Demostración: Si $p = 1 \Rightarrow p' = \infty$. Por definición de $\| g \|_\infty$ se tiene:

$$| f \cdot g | \leq | f | \cdot \| g \|_\infty$$

en casi todo punto de E respecto de μ. Por lo tanto:

$$\int_E | fg | \, d\mu \leq \int_E | f | \cdot \| g \|_\infty \, d\mu = \| g \|_\infty \int_E | f | \, d\mu = \| f \|_1 \cdot \| g \|_\infty$$

Esto prueba el teorema en este caso. Análogamente si $p = \infty (p' = 1)$

Podemos suponer pues suponer que $1 < p < \infty$. Si $\| f \|_p = 0$ o $\| g \|_{p'} = 0$ entonces f o g son nulas en casi todo punto de E respecto de μ , y por lo tanto $\int_E |\text{f.g}| \; d\mu = 0$,y la desigualdad se cumple trivialmente.

Podemos pues suponer que $\| f \|_p > 0$ y $\| g \|_{p'} > 0$. Cuando $\| f \|_p = \infty$ o $\| g \|_{p'} = \infty$ es de nuevo trivial.

Supongamos pues $0 < \| f \|_p < \infty$ y que $0 \leq \| g \|_{p'} < \infty$

En el lema 2 pongamos:

$$a = \frac{f(x)}{\| f \|_p}$$

$$b = \frac{g(x)}{\| g \|_{p'}}$$

Tendremos:

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\|g\|_{p'}^{p'}}$$

Integrando resulta:

$$\frac{\int_E |f(x)g(x)| \; d\mu}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{\int_E |f(x)|^p \; d\mu}{p\|f\|_p^p} + \frac{\int_x |g(x)|^{p'} \; d\mu}{p'\|g\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

De donde resulta la desigualdad de Hölder, multiplicando por $\| f \|_p \cdot \| g \|_{p'}$
$\square$

Vale un resultado más general, que se prueba por inducción en la cantidad k de factores:

Corolario 4.5.4 (Desigualdad generalizada de Hölder) *Si* $1 \leq p_i \leq \infty$ *para* $i = 1, 2, ldots, k$ *y*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = 1$$

entonces

$$\int_E |f_1(x) f_2(x) \ldots f_k(x)| \; d\mu \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i}$$

4.6. Desigualdad de Minkowski

Teorema 4.6.1 (Desigualdad de Minkowski)

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

Demostración: La desigualdad es inmediata en los siguientes casos:

$$\| f \|_p = \infty \text{ o } \| g \|_p = \infty$$

y también cuando $\| f+g \|_p = 0$.

Si $p = 1$ es muy fácil: Como $| f+g | \leq | f | + | g |$ integrando obtenemos lo que queremos.

Si $p = \infty$ ya fue probada (lema 4.4.2).

Eliminando todos estos casos particulares, tendremos $1 < p < \infty$, $\| f \|_p < \infty$, $\| g \|_p < \infty$, es decir que $f, g \in L^p$. Entonces, por el teorema 4.4.3, tendremos que $f+g \in L^p$, y $0 < \| f+g \|_p < \infty$.

$$\int_E | f+g |^p \, d\mu = \int_E | f+g | \cdot | f+g |^{p-1} \, d\mu$$

Luego:

$$\int_E | f+g |^p \, d\mu \leq \int_E | f | \cdot | f+g |^{p-1} \, d\mu + \int_E | g | \cdot | f+g |^{p-1} \, d\mu$$

Usando la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\int_E | f+g |^p \, d\mu \leq \| f \|_p \cdot \left(\int_E | f+g |^p \, d\mu \right)^{1/p'} + \| g \|_p \cdot \left(\int_E | f+g |^p \, d\mu \right)^{1/p'}$$

O sea:

$$\int_E | f+g |^p \, d\mu \leq (\| f \|_p + \| g \|_p) \cdot \left(\int_E | f+g |^p \, d\mu \right)^{1/p'}$$

Llamemos $\lambda = \int_E | f+g |^p \, d\mu$. Entonces tenemos:

$$\lambda \leq (\| f \|_p + \| g \|_p) \cdot \lambda^{1/p'}$$

Por lo tanto,

$$\lambda^{1-1/p'} \leq (\| f \|_p + \| g \|_p)$$

O sea:

$$\lambda^{1/p} \leq (\| f \|_p + \| g \|_p)$$

Esto es:

$$\| f+g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$$

□

Este teorema es importante porque nos permite hacer de L^p un espacio normado. Nos queda verificar dos propiedades de la norma, a saber:

1. $$\| \lambda \cdot f \|_p = | \lambda | . \| f \|_p$$

   Esto fue probado (Lema 4.4.1)

2. $\| f \|_p = 0$ si y sólo si $f = 0$

Si $\| f \|_p = 0$, entonces f es nula en casi todo punto de $E[\mu]$ (Se usa que si la integral de una función no negativa es 0, dicha función es nula en casi todo punto). Según el convenio adoptado para la igualdad, consideramos que $f = 0$. Así pues, tenemos que L^p es un espacio normado.

4.7. Desigualdad integral de Minkowki

El siguiente teorema constituye una versión integral de la desigualdad de Minkowski (teorema 4.6.1). Su prueba es análoga.

Teorema 4.7.1 *Sean $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ y $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible. Entonces* [1]*:*

$$\left(\int_Y \left| \int_X |f(x,y)| \, dy \right|^p \, dx \right)^{1/p} \leq \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy$$

Demostración: Consideramos la función definida por

$$I(x) = \int_Y |f(x,y)| \, dy$$

Por el teorema de Fubini-Tonelli, $I(x)$ está bien definida para casi todo x, y es medible. Calculemos

$$\|I(x)\|_p^p = \int_X I(x)^p \, dx = \int_X I(x)^{p-1} I(x) \, dx = \int_X I(x)^{p-1} \left(\int_Y |f(x,y)| \, dy \right) \, dx$$

Por el teorema de Fubini-Tonelli, podemos intercambiar el orden de las integrales y escribir esta expresión como

$$\int_Y \left(\int_X I(x)^{p-1} |f(x,y)| \, dx \right) \, dy$$

Utilizando entonces la desigualdad de Hölder en la integral interior, tenemos que:

$$\int_X I(x)^{p-1} |f(x,y)| \, dx \leq \left(\int_X |I(x)|^p \, dx \right)^{1/p'} \left(\int_X |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Integrando en y, deducimos que:

$$\|I(x)\|_p^p = \int_Y \left(\int_X I(x)^{p-1} |f(x,y)| \, dx \right) dy \leq \|I(x)\|_p^{p/p'} \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy$$

de donde deducimos la desigualdad buscada pues $p/p' = p - 1$:

$$\|I(x)\|_p \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p \, dx \right)^{1/p} dy$$

[1] Enunciamos y demostramos este resultado en $\mathbb{R}^n$ (con la medida de Lebesgue), pues este es el contexto en el que expusimos (en clase, por ahora no está incluido en estas notas) el teorema de Fubini-Tonelli. Pero el mismo es válido en espacios de medida abstractos (siempre que las medidas involucradas sean σ-finitas (pues el teorema de Fubini-Tonelli también es válido en este contexto más general).

siempre que $\|I(x)\|_p$ sea finita y no se anule.

Si $\|I(x)\|_p = 0$ (lo que ocurre si y sólo si $I(x) = 0$ en asi todo punto), la desigualdad es trivial.

Si $\|I(x)\|_p = +\infty$ se requiere utilizar algún argumento de aproximación. Por ejemplo, $\|I(x)\|_p$ será ciertamente finita si si f está soportada en un un conjunto de medida finita y es acotada.

Entonces aproximamos f por una sucesión de la forma $f_k(x) = f(x)\chi_{B_k}(x)$ donde $B_k = \{(x,y) \in X \times Y : |x| \leq k, |y| \leq k, |f(x,y)| \leq k\}$, y podemos sin pérdida de generalidad suponer que $f \geq 0$. La desigualdad es válida para las f_k por el argumento anterior, y el teorema de convergencia monótona implica entonces que es válida para f. □

4.8. Completitud de L^p (Teorema de Riesz-Fischer)

Lema 4.8.1 (Desigualdad de Tchebyschev) *Sean $f \in L^p$ y $\delta > 0$ entonces:*

$$\mu\left(\{x \in E : |f(x)| \geq \delta\}\right) \leq \frac{1}{\delta^p} \|f\|_p^p$$

Demostración: Sea $A = \{x \in E : |f(x)| \geq \delta\}$ entonces:

$$\| f \|_p^p = \int_E | f |^p \ d\mu \geq \int_A | f |^p \ d\mu \geq \int_A \delta^p \, d\mu = \delta^p \ \mu(A)$$

Dividiendo por δ^p se obtiene el lema. □

Teorema 4.8.2 (Riesz-Fischer) L^p *($1 \leq p \leq \infty$) es un espacio normado completo, es decir un espacio de Banach.*

Demostración: Caso $1 \leq p \leq \infty$
Debemos mostrar que toda sucesión de Cauchy en L^p converge.

Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^p. Nuestra primera afirmación es que (f_n) es de Cauchy en medida:

Sea $\delta > 0$ tenemos que probar $\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \, |\geq \delta))$ tiende a cero cuando *nym* tienden a infinito. Por el lema 4.8.1 aplicado a $f_n - f_m$ tenemos:

$$\mu(\{x \in E :| f_n(x) - f_m(x)| \geq \delta\}) \leq \frac{1}{\delta^p} \| f_n - f_m \|_p^p$$

Como (f_n) es de Cauchy en L^p dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir n_0 tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $\| f_n - f_m \|_p < \delta \cdot \varepsilon^{1/p}$. Luego si $n \geq n_0$:

$$\mu(\{x \in E : | \, | f_n(x) - f_m(x)| \geq \delta\}) \leq \frac{1}{\delta^p} \cdot \delta^p \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Como ε es arbitrario, y δ también, hemos probado que (f_n) es de Cauchy en medida. Por lo tanto sabemos que tiene una subsucesión (f_{n_k}) que converge en

casi todo punto de E (con respecto a μ) a una función medible f finita en casi todo punto.
Pongamos

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n_k}(x)$$

Queremos ver $f \in L^p$ y que $f_n \to f$ en L^p. Por el lema de Fatou,

$$\int_E \liminf_{k\to+\infty} | f_{n_k} - f_n |^p \ d\mu \leq \liminf_{k\to+\infty} \int_E | f_{n_k} - f_n |^p \ d\mu$$

Ahora cuando k tiende a infinito f_{n_k} tiende a f, luego $| f_{n_k} - f_n |^p$ tiende a $| f - f_n |^p$ (El límite inferior es en realidad el límite), y se obtiene:

$$\int_E | f - f_n |^p \ d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_E | f_{n_k} - f_n |^p \ d\mu = \lim_{k\to\infty} \| f_{n_k} - f_n \|_p^p$$

Pero como (f_n) es de Cauchy en L^p y $n_k \geq k$ tenemos dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $\| f_{n_k} - f_n \| < \varepsilon^{1/p}$ si $n, k \geq n_0$, en consecuncia:

$$\lim_{k\to+\infty} \| f_{n_k} - f_n \|_p^p \leq \varepsilon$$

(Ya que si todos los números de una sucesión se conservan a partir de un cierto momento menores o iguales que ε, el líimite inferior es menor o igual que ε).
Luego resulta:

$$\int_E | f - f_n |^p \ d\mu \leq \varepsilon \text{ si } n \geq n_0$$

Lo que significa que f converge a f en L^p. Además $f \in L^p$ ya que para $n \geq n_0$, $f - f_n \in L^p$ y como $f_n \in L^p \Rightarrow f \in L^p$.

Caso $p = \infty$ **:**
Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en L^∞. Esto significa que $\| f_n - f_m \|_\infty \to 0$ cuando $n, m \to \infty$. Para $n, m \in \mathbb{N}$ llamenos:

$$Z_{n,m} = \{x \in E : | f_n(x) - f_m(x) | > \| f_n - f_m \|_\infty\}$$

Entonces $\mu(Z_{n,m}) = 0$ por defición de la norma infinito. Sea

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_{n,m}$$

Entonces $\mu(Z) = 0$. Si $x \notin Z$, entonces $x \notin Z_{n,m}$ para ningún n, m, entonces:

$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \| f_n - f_m \|_\infty$$

Como $f_n - f_m \|_\infty \to 0$ cuando $n, m \to \infty$ resulta que (f_n) es uniformemente de Cauchy en $E - Z$, y por lo tanto converge uniformemente en $E - Z$ hacia una función f.

Para que f esté definida en todo E pongamos $f(x) = \limsup_{n\to} f_n(x)$ Entonces f es medible. Dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir n_0 tal que si $n \geq n_0$, $\| f_n - f_m \|_\infty < \epsilon$. Entonces si $x \in E - Z$,

$$| f_n(x) - f_m(x) | \leq \| f_n - f_m \|_\infty < \epsilon$$

Haciendo que $m \to \infty$ resulta:

$$\| f_n - f \| \leq \varepsilon \text{ si } x \in E - Z \text{ y } n \geq n_0$$

Esto significa que ε es una cota superior escencial de $f_n - f$ por lo que:

$$\| f_n - f \|_\infty \leq \varepsilon$$

Esto en particular prueba que $f - f_n \in L^\infty \Rightarrow f \in L^\infty$, y como ε es arbitrario resulta que $\| f_n - f \|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$, o sea que (f_n) converge a f en L^∞.
□

4.9. Inclusiones entre los espacios L^p

Teorema 4.9.1 *Si $\mu(E) < \infty$ y $1 \leq p \leq q < \infty$ entonces vale la desigualdad*

$$\| f \|_p \leq \mu(E)^{(q-p)/pq}. \| f \|_q$$

Demostración:

$$\int_E | f |^p \, d\mu = \int_E | f | \cdot 1 \, d\mu$$

Sea $r = q/p$, calculemos su exponente conjugado r' y usamos la desigualdad de Hölder:

$$r' = \frac{q/p}{(q/p) - 1} = \frac{q}{q-p}$$

y resulta:

$$\int_E | f |^p \, d\mu \leq \left(\int_E | f |^q ; d\mu \right)^{p/q} \cdot \left(\int_E 1 \, d\mu \right)^{(q-p)/q}$$

Es decir que:

$$\int_E | f |^p \ d\mu \leq \left(\int_E | f |^q \ d\mu \right)^{p/q} \cdot \mu(E)^{(q-p)/q}$$

Al elevar a la potencia $1/p$, resulta la desigualdad del teorema. □

Corolario 4.9.2 *Si $\mu(E) < \infty$ y $1 \leq p \leq q < \infty$ entonces $L^q \subset L^p$ y si $f_n \to f$ en L^q entonces $f_n \to f$ en L^p.*

Demostración: Si $\| f \|_q$ es finita entonces $\| f \|_p$ es finita. Si $fn \to f$ en L^q, $\| f - f_n \|_q \to 0$, entonces $\| f - f_n \|_p \to 0$. □

Nota: Cuando $0 < p < 1$ podemos definir

$$L^p = \left\{ f \in \mathcal{F} : \int_E | f |^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

L^p sigue siendo un espacio vectorial, pero no es un espacio normado con la norma p (La desigualdad de Minkowski es falsa). No obstante, podemos definir la distancia $d(f,g)$ entre dos funciones f y g de L^p por

$$d(f,g) = \int_E | f - g |^p \ \ d\mu$$

L^p resulta un espacio métrico completo.

4.10. Clases de funciones densas en L^p

Teorema 4.10.1 *Las siguientes clases de funciones son densas en $L^p(\mathbb{R}^d)$ (si $1 \leq p < \infty$)*

1. *Las funciones simples (que están en L^p)*
2. *Las funciones continuas (que están en L^p)*
3. *Las funciones continuas de soporte compacto. donde* $\text{Soporte}(f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

Demostración: Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Supongamos además $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $f \geq 0$.

Por hipótesis $\int f^p < \infty$. Sabemos que existe una sucesión de funciones simples no negativas φ_k que tiende a f en forma creciente:

$$\varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \ldots \leq \varphi_k \leq \ldots$$

y

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x)$$

Tenemos:

$$\varphi_k \leq f \Rightarrow \varphi_k^p \leq f^p \Rightarrow \int \varphi_k^p \leq \int f^p \Rightarrow \varphi_k \in L^p$$

$0 \leq (f - \varphi_k)^p \leq f^p$ por el teorema de la convergencia mayorada

$$\lim_{k \to \infty} \int (f - \varphi_k)^p = 0 \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|f - \varphi_k\|_p = 0$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, podemos elegir k tal que $\|f - \varphi_k\|_p < \varepsilon$

Si $f \in L^p$ es cualquiera con valores reales $\Rightarrow f = f^+ - f^-, |f| = f^+ + f^-$ donde $f^+ = 1/2(f + |f|)$ y $f^- = 1/2(|f| - f)$ permite descomponer a f como diferencia de dos funciones positivas.

$$\|f^{=}\|_p = 1/2 \parallel f + |f| \parallel_p \leq 1/2.(\|f\|_p + \||f|\|_p) = \parallel f \parallel_p$$

luego $f^+ \in L^p$. Analogamente $f^- \in L^p$.

Dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir (por lo ya probado) funciones simples $\varphi^+ y \varphi^-$ tales que $\|f^+ - \varphi^+\|_p < \varepsilon/2$ y $\|f^- - \varphi^-\|_p < \varepsilon/2 \Rightarrow$

$$\|f - (\varphi^+ - \varphi^-)\|_p = \|(f^+ - f^-) - (\varphi^+ - \varphi^-)\|_p \leq \|f^+ - \varphi^+\|_p + \|f^- - \varphi^-\| \leq \varepsilon$$

Finalmente si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ escribimos $f = \mathrm{Re}(f) + i \cdot \mathrm{Im}(f)$ y aplicamos un argumento análogo. Esto prueba que las funciones simples (que están en L^p) son densas en L^p.

Para probar que las funciones continuas son densas en L^p , basta probar que una función simple se puede aproximar en L^p por funciones continuas.

Primero lo probaremos para funciones características de conjuntos finitamente medibles. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible con $|E| < +\infty$, vamos a probar que dado $\varepsilon > 0$ existe una función continua g tal que $\|\chi_E - g\|_p < \varepsilon$

Como E es medible existen un conjunto abierto G y un cerrado F tales que:

$$F \subset E \subset G, |G - F| \leq \varepsilon^p$$

Definimos entonces la función

$$g(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G^c)}$$

(G^c es el complemento de G)

Si $d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$ (F es cerrado)

Si $d(x, G^c) = 0 \Leftrightarrow x \in G^c$ (G^c es cerrado) $\Leftrightarrow x \notin G$

Como si $x \in F \Rightarrow x \in G$ se deduce que el denominador no se anula y como la distancia a una conjunto es una función continua $\Rightarrow g$ es continua

Notemos que $0 \leq g \leq 1$ y $g(x) = 1$ si $x \in F$, $g(x) = 0$ si $x \in G^c$,

$$\|\chi_E - g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_E - g|^p = \int_{G-F} |\chi_E - g|^p$$

(pues el integrando vale 0 en G^c y en F.

Como $0 \leq g \leq 1$, deducimos

$$0 \leq |\chi - g|^p \leq 1 \Rightarrow \|\chi - g\|^p \leq |G - F| < \varepsilon^p$$

Elevando ambos miembros a la potencia $1/p$:

$$\|\chi - g \parallel \leq |G - F| < \varepsilon$$

Sea ahora

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i}$$

una función simple en L^p. Tenmos :

$$|\varphi|^p = \sum_{i=1}^{N} |c_i|^p . \chi_{E_i}$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^p = \sum_{i=1}^{N} |c_i|^p . |E_i| \leq +\infty \Rightarrow |E_i| < +\infty \text{ para todo i.}$$

Para cada i elijo una g continua tal que $\|\chi_{E_i} - g\|_p < \varepsilon$ (se puede por lo antes probado). Sea:

$$g = \sum_{i=1}^{N} c_i . g_i$$

Entonces g es continua y

$$\|\varphi - g\|_p = \| \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot (\chi_{E_i} - g_i)\|_p \leq \sum_{i=1}^{N} |c_i| \cdot \|\chi_{E_i} - g_i\|_p \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{N} |c_i|$$

Como ε es arbitrario , y $\sum_{i=1}^{N} |c_i|$ es una constante que sólo depende de φ , esto prueba que las funciones simples se pueden aproximar en L^p por funciones continuas.

Finalmente para probar que las funciones continuas de soporte compacto son densas en L^p , probaremos que una función continua $g \in L^p$ se puede aproximar en L^p por funciones continuas de soporte compacto.

Definamos la función

$$\psi_k = \frac{d(x, B_{2k}^c)}{d(x, B_{2k}^c) + d(x, B_k)}$$

donde $B_k = B(0, k)$ y $B = B(0, 2k)$

Notamos ψ_k es continua vale 1 en B_k y 0 fuera de $B_{2k} \Rightarrow g \cdot \psi_k$ es una función continua de soporte compacto.

$$|g - g \cdot \psi_k|^p = |g \cdot (1 - \psi_k)|^p \leq |g|^p$$

Cuando $k \to \infty$, $g \cdot \psi_k \to g$ por el teorema de la convergencia mayorada.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g - g \cdot \psi_k|^p \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

o sea $g \cdot \psi_k \to g$ en L^p □

Observación: Cuando $p = \infty$, sigue siendo cierto que las funciones simples acotadas son densas en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, sin embargo las funciones continuas acotadas no son densas en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (de hecho, son un subespacio cerrado, pues el límite uniforme de funciones continuas acotadas también lo es).

Ejercicio: Probar que $L^p(\mathbb{R}^d)$ es un espacio métrico separable si $1 \leq p < +\infty$, pero no lo es si $p = \infty$.

Capítulo 5

Diferenciación (en $\mathbb{R}^d$)

El propósito de este capítulo es probar resultados que generalizan el teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue. Se trata sin duda de los resultados más bellos y profundos que veremos en el curso. Antes de llegar a ellos, necesitaremos desarrollar algunas herramientas.

5.1. El Lema Simple de Vitali

Comenzaremos nuestro trabajo, probando un lema de cubrimiento.

Si $B = \overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_0\| \leq r\}$ es una bola cerrada en $\mathbb{R}^d$ tenemos que:

$$m(B) = \omega_d r^d$$

donde $\omega_d = m(\overline{B}(0,1))$ es una constante que depende de la dimensión.

Notaremos $r(B)$ al radio de la bola B.

Lema 5.1.1 (Lema Simple de Vitali) *Sea $\mathcal{C}$ una colección de bolas cerradas que cubre un conjunto $E \subset \mathbb{R}^d$. Si $\sup\{r(B) : B \in \mathcal{C}\} < +\infty$, existe una sucesión disjunta (finita o no) de bolas de la colección $\mathcal{C}$:*

$$B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$$

tal que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \geq C(d)\, m_e(E)$$

donde $C(d)$ es una constante que depende sólo de la dimensión, que puede tomarse como $C(N) = (3+\varepsilon)^{-d}$ para cualquier $\varepsilon > 0$.

Demostración: Fijemos $0 < \varepsilon < 1$, y sea $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{1-\delta} = 1 + \varepsilon$

Sea $s_1 = \sup\{r(B) : B \in \mathcal{C}\}$, que es finito por hipótesis. Como $0 < \delta < 1$, podemos elegir una bola $B_1 \in \mathcal{C}$ tal que:

$$r(B_1) > s_1(1-\delta)$$

Puede ocurrir que B_1 intersecte a cualquier bola de $\mathcal{C}$ entonces el proceso de selección se detiene allí.

Si no es este el caso consideramos:

$$s_2 = \sup\{r(B) : B \in \mathcal{C}, B \cap B_1 = \emptyset\}$$

Podemos entonces elegir una bola $B_2 \in \mathcal{C}$ tal que:

$$r(B_2) > s_2(1-\delta), B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

Puede ocurrir que cualquier bola de la coleeción intersecte a B_1 o a B_2. Si este es el caso, el proceso termina aquí Si no, continuamos el proceso.

En general: Supongamos que ya elegimos $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ disjuntas. Si no existe $B \in \mathcal{C}$ que no corte a B_1, B_2, $\ldots$, B_{k-1} no podemos proseguir.

Si existe, sea:

$$s_k = \sup\{r(B) : B \in \mathcal{C}, B \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1}) = \emptyset\}$$

Elegimos $B_k \in \mathcal{C}$, tal que

$$r(B_k) > s_k(1-\delta), B_k \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1}) = \emptyset$$

Este proceso puede terminar en un número finito de pasos u obtenerse una sucesión B_k infinita.

Supongamos primero que se obtiene una sucesión infinita. Está claro que, por construcción, las bolas B_k resultan disjuntas.

Queremos probar que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \geq C(d)\; m_e(E)$$

Si la serie diverge no hay nada que probar. Supongamos pues que converge. Luego:

$$m(B_k) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty \Rightarrow r(B_k) \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

Vamos a probar que entonces toda bola de $\mathcal{C}$ corta a alguna bola de la sucesión construida B_k. Supongamos que existe una bola $B \in \mathcal{C}$ que no corta a ninguna bola B_k

$$\forall k \; B \cap B_k = \emptyset$$

Para cada k tendremos: $s_k \geq r(B)$, pues B pertenece a la colección de bolas

$$\{B : B \in \mathcal{C}, B \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1}) = \emptyset\}$$

Deducimos que:

$$r(B_k) > s_k(1-\delta) \geq r(B)(1-\delta)$$

Como $r(B)(1-\delta)$ es un número positivo fijo esto es absurdo, ya que $r(B_k) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Esta contradicción provino de suponer que existía una bola B en $\mathcal{C}$ que no corta a ninguna de las B_k.

Luego toda bola de $\mathcal{C}$ corta a alguna B_k. Lo mismo vale si el proceso de selección se detiene tras un número finito de pasos.

Sea $B \in \mathcal{C}$ cualquiera. Consideremos el mínimo índice k tal que $B \cap B_k \neq \emptyset$

$$\Rightarrow B \cap (B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k-1}) = \emptyset \Rightarrow s_k \geq r(B)$$

(Si fuera $k=1$ igualmente sería $s_1 \geq r(B)$)

($r(B)$ es un elemento de la colección de números cuyo supremo es s_k)

Por otra parte, por construcción, tenemos que:

$$r(B_k) > s_k(1-\delta) \geq r(B)(1-\delta)$$

O sea para cualquier bola $B \in \mathcal{C}$ existe una bola B_k de las que hemos elegido, tal que $B \cap B_k \neq \emptyset$ y $r(B) < \frac{1}{1-\delta} r(B_k) = (1+\varepsilon) r(B_k)$

Sea B_k^* la bola concéntrica con B_k cuyo radio es $(3+\varepsilon) \cdot r(B_k)$, entonces: $B \subset B_k^*$

En efecto, si $B = B(x,r)$ y $z \in B$, sea $y \in B \cap B_k$,

$$d(z,x_k) \leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,x_k) \leq 2r(B) + r(B_k)) < (3+\varepsilon) r(B_k)$$

Las B_k^* no son necesariamente disjuntas. $m(B_k^*) = (3+\varepsilon)^n m(B_k)$

$$E \subset \bigcup_{B \in \mathcal{C}}^{\infty} B \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*$$

Por lo tanto:

$$m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k^*) = \sum_{k=1}^{\infty} (3+\varepsilon)^d m(B_k)$$

$$\Rightarrow (3+\varepsilon)^{-d} m_e(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

Esto es lo que queríamos probar. □

Observación 5.1.2 *El lema vale aunque $r(B)$ no esté acotado si pedimos $m_e(E) < +\infty$, en efecto si $r(B)$ no es acotado podemos elegir una sola bola B_1 tal que: $m(B_1) \geq (3+\varepsilon)^{-d} m_e(E)$*

Observación 5.1.3 *El lema simple de Vitali vale también si reemplazamos las bolas por cubos de lados paralelos a los ejes, que son las bolas para la distancia*

$$d_\infty(x,y) = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

La prueba es la misma.

5.2. La Función Maximal de Hardy - Littlewood

En esta sección, introduciremos un operador que resultará de fundamental importancia para probar el teorema de diferenciación de Lebesgue. Cabe mencionar que este operador tiene muchas otras aplicaciones, ya que permite acotar a muchos operadores que aparecen en el análisis armónico.

Definición 5.2.1 *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos la función maximal de Hardy-Littlewood por:*

$$Mf(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)|dy$$

donde el supremo se toma sobre todos las bolas cerradas B que contienen al punto x. M es un operador (el operador maximal de Hardy - Littlewood)

Observación 5.2.2 *En la definición de $Mf(x)$ se pude reemplazar las bolas cerradas por bolas abiertas.*

Demostración: Notemos $M^*f(x)$ a una función definida como $Mf(x)$ pero usando bolas abiertas en vez de bolas cerradas.

Sea B una bola cerrada que contiene a x la escribimos como $B = \bigcap_{k=1}^\infty B_k$ donde las B_k forman una sucesión decreciente de bolas abiertos.

Tenemos: $m(B_k) \to m(B)$ y $\int_{B_k} |f(y)|dy \to \int_B |f(y)|dy$ (se justifica usando el teorma de Lebesgue para $f \cdot \chi_{B_k}$). Luego: $\frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} |f|dy \to \frac{1}{m(B)} \int_B |f|dy$

Ahora para cada k es:

$$\frac{1}{m(B_k)} \int_{B_k} |f|dy \ \leq M^*f(x)$$

por lo tanto:

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f|dy \leq M^*f(x)$$

y como vale para cualquier bola cerrada B será:

$$Mf(x) \leq M^*f(x)$$

Analogamente podemos escribir una bola abierta como unión de una sucesión creciente de bolas ceradas y obtener: $M^*f(x) \leq Mf(x)$ luego $Mf(x) = M^*f(x)$

□

Observación 5.2.3 *$Mf(x)$ es continua inferiormente, es decir: el conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$$

es abierto para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración: Supongamos $Mf(x) > \lambda$,entonces existe una bola abierta B tal que:

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \lambda$$

Sea $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) = \{x' \in \mathbb{R}^n : \| x - x' \| < \delta\} \subset B$

(que existe por ser la bola B abierto)

Si $y \in B(x, \delta) \Rightarrow Mf(y) \geq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \lambda$

ya que B es una bola que contiene al punto y. Así pues , hemos probado que dado $x \in \{Mf(x) > \lambda\}$ existe una bola $B(x, \delta)$ contenida en dicho conjunto $\Rightarrow \{Mf(x) > \lambda\}$ es abierto.

□

Corolario 5.2.4 *$Mf(x)$ es una función medible.*

Proposición 5.2.5 (Desigualdad Maximal de Hardy - Littlewood) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$*

$$m(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{C(d) \|f\|_1}{\lambda} \tag{5.1}$$

donde $C(d)$ es una constante que depende sólo de la dimensión (de hecho se puede tomar $C(d) = 3^d$).

Demostración: Siendo $\lambda > 0$ pongamos $E = \{x : Mf(x) > \lambda\}$. Si $x \in E$ entonces existe una bola cerrada B tal que $x \in B$ y $\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \lambda$

Sea $\mathcal{C}$ la colección de las bolas B que cumplen $\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy > \lambda$. Cada punto de E está en una bola B. por lo tanto $\mathcal{C}$ cubre el conjunto E.

Si $B \in \mathcal{C}$, $\int_B |f(y)| dy > \lambda m(B) \Rightarrow m(B) < \frac{\|f\|_1}{\lambda}$

Luego, las bolas de $\mathcal{C}$ tienen radios acotados. Luego por el lema simple de Vitali existe una sucesión disjunta

$$B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$$

de bolas de la colección $\mathcal{C}$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \geq C(d)^{-1} m_e(E)$$

Por lo tanto,

$$m_e(E) \leq C(d) \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq C(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \int_{B_k} |f(y)| dy = \frac{C(d)}{\lambda} \int_A |f(y)| dy$$

donde $A = \bigcup_k B_k \Rightarrow$ Em consecuencia:

$$m_e(E) \leq \frac{C(d)\|f\|_1}{\lambda}$$

como queríamos probar. □

Observación 5.2.6 *Notemos que en la prueba anterior, utilizando definición de Mf tenemos en realidad que $A \subset E$, por lo que vale la estimación más fuerte:*

$$m\left(\{Mf > \lambda\}\right) \leq \frac{C(d)}{\lambda} \int_{\{Mf(x)>\lambda\}} |f(x)|\, dx$$

Resumamos las propiedades del operador maximal:

1. Es sublineal
$$M(f+g) \leq M(f) + M(g)$$

2. Es positivamente homogéneo: Si $c \in \mathbb{R}$ es una constante, $M(c \cdot f) = |c| \cdot M(f)$

3. $$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$
Dem Sea $C = \|f\|_\infty \Rightarrow |f(y)| \leq C$ en casi todo punto.
$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy \leq \frac{1}{m(B)} \int_B C dy = C$$
luego $Mf(x) \leq C$

4. Se verifica la desigualda maximal: Existe una constante $C(d) > 0$ tal que si $\lambda > 0$,
$$m\left(\{Mf > \lambda\}\right) \leq \frac{C(d)\|f\|_1}{\lambda}$$

Corolario 5.2.7 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $Mf(x)$ es finita en casi todo punto*

Demostración:

$$\{Mf(x) = +\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{Mf(x) > k\}$$

luego

$$m(\{Mf(x) = +\infty\}) \leq m(\{Mf(x) > k\}) \leq \frac{C(d)\|f\|_1}{k}$$

Cuando $k \to \infty$ resulta que:

$$m(\{Mf(x) = +\infty\}) \leq 0 \Rightarrow m(\{Mf(x) = +\infty\}) = 0$$

Luego $Mf(x)$ es finita en casi todo punto. □

Observación 5.2.8 *También se considera a veces la maximal centrada*

$$M^{BC} f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy$$

o se puede reemplazar las bolas por cubos Q que contienen a x

$$M^Q f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{m(Q)} \int_Q |f(y)| dy$$

o análogamente cubos centrados en x. En $\mathbb{R}^d$ con la medida de Lebesgue, todas estas variantes de la función maximal resultan equivalentes en el sentido de que existen constantes $c_1(d), c_2(d) > 0$ tales que

$$c_1(d) M f(x) \leq M^{BC} f(x) \leq c_2(d) M f(x)$$

(análogamente para M^Q) Esto puede no verificarse si reemplazamos la medida de Lebesgue por otras medidas.

Observación 5.2.9 *Si en el lema simple de Vitali, consideramos una colección finita de bolas en lugar de una infinita, ¡la prueba resulta aún más simple ! (ya que los números s_k de la prueba son máximos en lugar de supremos, en este caso). Esta versión finita del lema de Vitali es suficiente para probar la desigualdad maximal 5.1, ya que podemos aproximar el conjunto $E = \{x : Mf(x) > \lambda\}$ por un compacto contenido adentro (usando la regularidad de la medida), al que podemos cubrir con finitas bolas. Esto queda como ejercicio para el lector. Sin embargo, en el curso hemos preferido utilizar la versión infinita del lema simple de Vitali, ya que la usaremos para probar el verdadero lema de Vitali (teorema 5.4.2).*

5.3. El Teorema de diferenciación de Lebesgue

Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $x \in \mathbb{R}^d$, B una bola cerrada que contiene a x

Definición 5.3.1 *Diremos que x es un* **punto de diferenciación** *de la integral de f si:*

$$\lim_{r(B)\to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)\, dy = f(x)$$

(límite cuando $r(B) \to 0$)

Definición 5.3.2 *Diremos que x es un* **punto de Lebesgue** *de f si*

$$\lim_{r(B)\to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy = 0$$

Observación 5.3.3 *Todo punto de Lebesgue es un punto de diferenciación, pues*

$$\left| \frac{1}{m(B)} \int_B f(y) dy - f(x) \right| \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy$$

Teorema 5.3.4 (Teorema de diferenciación de Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, casi todo punto es un punto de lebesgue, o sea en casi todo punto x vale:*

$$\lim_{r(B))\to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| dy = 0$$

Observación 5.3.5 *El mismo teorema vale si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ (es localmente integrable), lo que significa que f es integrable sobre cualquier compacto de $\mathbb{R}^d$. Para probarlo, basta aplicar el teorema a $f_k = f \cdot \chi_{B_k}$ donde $B_k = B(0,k)$ es la bola de centro 0 y radio k.*

Especializando el teorema al caso $d = 1$, obtenemos:

Corolario 5.3.6 *Si $f \in L^1[a,b]$ y consideramos su integral indefinida*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

tenemos que $F'(x) = f(x)$ en casi todo punto de (a,b).

Para demostrar el teorema de diferenciación, introducimos un operador L definido por:

$$Lf(x) = \limsup_{r(B)\to 0} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy$$

Una definición más precisa: se elige un $\varepsilon > 0$ y se forma

$$L_\varepsilon f(x) = \sup_{r(B)<\varepsilon} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, dy$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas cerradas B que contienen a x tales que $r(B) < \varepsilon$, entonces

$$Lf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon f(x)$$

Queremos probar $Lf(x) = 0$ en casi todo punto (es equivalente al enunciado del teorema)
Las propiedades de $Lf(x)$ son parecidas a las de $Mf(x)$

En primer lugar, observemos que:

$$L(f+g) \leq L(f) + L(g)$$

Lema 5.3.7 *Si f es continua (e integrable) entonces $Lf(x) = 0$ en todo punto.*

Demostración: Si f es continua en x será $|f(y)-f(x)| < \delta = \delta(\varepsilon)$ si $|x-y| < \delta$

Eligiendo $r(B) < \frac{\delta}{2}$, si $x, y \in B$ será $|x-y| < \delta$, porque el díametro de la bola es dos veces el radio. Luego

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy \leq \frac{1}{m(B)} \cdot m(B) \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Como esto vale para cualquier bola $B \ni x$ tal que $\delta(B) < \rho$ será $Lf(x) \leq \varepsilon$, y como vale para todo ε será $Lf(x) = 0$

$\square$

Lema 5.3.8 *Existe una constante $C' = C'(d)$ tal que:*

$$m_e(\{Lf(x) > \lambda\}) \leq \frac{C'}{\lambda} \parallel f \parallel_1$$

Demostración:

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy \leq \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| \, dy + \frac{1}{m(B)} \int_B |f(x)| \, dy$$

En consecuencia,

$$\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y) - f(x)| \, dy \leq Mf(x) + |f(x)|$$

y por lo tanto,

$$Lf(x) \leq Mf(x) + |f(x)|$$

Luego,

$$\{Lf(x) > \lambda\} \subset \{Mf(x) > \lambda/2\} \cup \{|f(x)| > \lambda/2\}$$

y por lo tanto,

$$m_e(\{Lf(x) > \lambda\}) \leq m_e(\{Mf(x) > \lambda/2\}) + m_e(\{|f(x)| > \lambda/2)$$

Concluimos que

$$m_e(\{Lf(x) > \lambda\}) \leq \frac{2C}{\lambda} \parallel f \parallel_1 + \frac{2}{\lambda} \parallel f \parallel_1 = \frac{2C+2}{\lambda} \parallel f \parallel_1$$

(Usamos la desigualdad maximal, C es la constante de Hardy-Littlewood 5^n).

$\square$

Ahora podemos probar el teorema 5.3.4:

Demostración: Sea $f \in L^1$. Como las funciones continuas son densas en L^1, existe una sucesión ψ_k de funciones continuas (e integrables) tales que $\parallel f - \psi_k \parallel_1 \to 0$

Tenemos que:

$$L(f) = L((f - \psi_k) + \psi_k) \leq L(f - \psi_k) + L(\psi_k) = L(f - \psi_k)$$

pues $L(\psi_k) = 0$ (ψ_k es continua). Por lo tanto: En consecuencia,

$$m_e(\{Lf > \lambda\}) \leq m_e(\{L(f - \psi_k) > \lambda\})$$

(por inclusión). Por lo tanto,

$$m_e(\{Lf > \lambda\}) \leq \frac{1}{C'} \parallel f - \psi_k \parallel_1 \to 0 \text{ cuando } k \to \infty$$

Por lo tanto, para todo $\lambda > 0$, $m_e(\{Lf > \lambda\}) = 0$ y como

$$\{Lf \neq 0\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{Lf > 1/k\}$$

concluimos que $m_e(\{Lf \neq 0\}) = 0$, es decir que $Lf(x) = 0$ en casi todo punto. Esto prueba el teorema. $\square$

Observación 5.3.9 *Si bien utilizaremos la función maximal de Hardy-Littlewood como una herramienta para probar el teorema de diferenciación de Lebesgue, su importancia radica en que controla a muchos otros operadores que aparecen en el análisis (ver la sección 7.7)*

Observación 5.3.10 *Una inspección cuidadosa de la prueba anterior, muestra que hemos utilizado muy poco del hecho de que estamos trabajando en $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. De hecho, la desigualdad maximal y el teorema de diferenciación pueden probarse mediante argumentos similares si μ es una medida de Borel regular en un espacio métrico (Ω, d) tal que $0 < \mu(B) < \infty$ para toda bola cerrada $B = B(x, r)$ de Ω, siempre que μ satisfaga la llamada* propiedad doblante*: existe $C > 0$ tal que $\mu(B(x, 2r)) \leq C\ \mu(B, r)$ para todo $x \in \Omega$ y todo $r > 0$.*

5.4. Cubrimientos de Vitali: Lema de Vitali

En esta sección, probaremos un lema de cubrimiento más refinado.

Definición 5.4.1 *Diremos que una colección $\mathcal{C}$ de bolas cerradas cubre al conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$* **en el sentido de Vitali** *si para todo $x \in E$ y para todo $\eta > 0$ existe una bola $B \in \mathcal{C}$ tal que $x \in B$ y $r(B) < \eta$*

Observacion: Una bola tiene radio no nulo, por lo tanto debe haber infinitas bolasque contengan a x.

Lema 5.4.2 (Lema de Vitali) *Si $0 < m_e(E) < +\infty$ y $\mathcal{C}$ cubre a E en el sentido de Vitali entonces podemos extraer de $\mathcal{C}$ una sucesión de bolas* **disjuntas** *$B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ tales que*

1.
$$m_e\left(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0$$

(Las bolas B_k cubren E salvo un conjunto de medida nula)

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| < +\infty$$

(La serie de las medidas de las B_k converge)

Observacion: Si $m_e(E) = +\infty$ vale 1) pero no 2). Si $m_e(E) = 0$ es trivial.

Demostración: Sea $C(d)$ la constante del lema simple de Vitali y fijemos β con $0 < \beta < C(d)$. Sabemos que existe un abierto G tal que $G \supset E$ y $m(G) \leq m_e(E)(1+\varepsilon)$.

Podemos suprimir de $\mathcal{C}$ las bolas que no están contenidas en G y seguir teniendo un cubrimiento de Vitali. Supongamos pues que si $B \in \mathcal{C} \Rightarrow B \subset G$.
Por el lema simple de Vitali, existe una sucesión $B_1, B_2, B_3, \ldots$ de bolas disjuntas de $\mathcal{C}$ tales que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \geq C(d) m_e(E) > \beta\, m_e(E)$$

Existe entonces un N_1 tal que

$$\sum_{k=1}^{N_1} m(B_k) > \beta\, m_e(E)$$

entonces,

$$m_e\left(E - \bigcup_{k=1}^{N_1} B_k\right) \leq \left(G - \bigcup_{k=1}^{N_1} B_k\right) = m(G) - m\left(\bigcup_{k=1}^{N_1} B_k\right) = m(G) - \sum_{k=1}^{N_1} m(B_k)$$

ya que las B_k son disjuntas y están incluidas en G. En consecuencia,

$$m_e\left(E - \bigcup_{k=1}^{N_1} B_k\right) < (1+\varepsilon) m_e(E) - \beta m_e(E) = (1+\varepsilon+\beta) m_e(E) < (1-\beta/2) m_e(E)$$

(siempre que elijamos $\varepsilon < \beta/2$)
Concideramos el conjunto:

$$E_1 = E - \bigcup_{k=1}^{N_1} B_k$$

y la colección

$$\mathcal{C}_1 = \left\{ B \in \mathcal{C} : B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_1} B_k \right) = \emptyset \right\}$$

Entonces $\mathcal{C}_1$ cubre a E_1 en el sentido de Vitali
(Si $x \in E_1 \Rightarrow d(x, \bigcup_{k=1}^{N_1} B_k) > 0$ pues $\bigcup_{k=1}^{N_1} B_k$ es un conjunto cerrado luego existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_1} B_k \right) = \emptyset$, y como $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de Vitali, hay bolas de $\mathcal{C}$ contenidas en $B(x,r)$ de diámetro tan pequeño como se quiera)
De $\mathcal{C}_1$ podemos pues, extraer una sucesión $B_{N_1+1}, B_{N_1+2}, ..., B_{N_2}$ (renombrándolos) tal que:

$$m_e \left(E_1 - \bigcup_{k=N_1+1}^{N_2} B_k \right) < (1-\beta/2) m_e(E_1) \leq (1-\beta/2)^2 m_e(E)$$

Entonces,

$$m_e \left(E - \bigcup_{k=1}^{N_2} B_k \right) \leq (1-\beta/2)^2 m_e(E)$$

Ahora consideramos:

$$E_2 = E - \bigcup_{k=1}^{N_2} B_k$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{ B \in \mathcal{C} : B \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N_2} B_k \right) = \emptyset \right\}$$

Repitiendo el procedimiento, elegimos $B_{N_2+1}, B_{N_2+2}, \ldots, B_{N_3}$ disjuntas entre sí (y con las anteriores) tales que:

$$m_e \left(E_2 - \bigcup_{k=N_2+1}^{N_3} B_k \right) < (1-\beta/2) m_e(E_2) \leq (1-\beta/2)^3 m_e(E)$$

entonces

$$m_e \left(E - \bigcup_{k=1}^{N_3} B_k \right)_e \leq (1-\beta/2)^3 m_e(E)$$

Este proceso puede continuarse al infinito, obteniendo una sucesión B_k tal que

$$m_e \left(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) = 0$$

pues

$$m_e \left(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \leq m_e \left(E - \bigcup_{k=1}^{N_i} B_k \right) \leq (1-\beta/2)^i m_e(E) \to 0 \text{ cuando } i \to \infty$$

Por último como

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset G \Rightarrow m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leq m(G) < +\infty$$

y como

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(B_k)$$

ya que las B_k son disjuntas, concluimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) \leq m(G) < +\infty$$

Esto prueba el lema. $\square$

Corolario 5.4.3 *Si $0 < m_e(E) < +\infty$ y la colección de bolas $\mathcal{C}$ cubre E en el sentido de Vitali, entonces podemos extraer de $\mathcal{C}$ una sucesión finita* **disjunta** *$B_1, B_2, \ldots, B_n$ tal que:*

$$m_e\left(E \cap -\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\right) > m_e(E) - \varepsilon$$

Demostración: Por el lema de Vitali, podemos extraer una sucesión $B_1, B_2, \ldots, E_k, \ldots$ tal que:

$$m_e\left(E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(B_k) < +\infty$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} m(B_k) < \varepsilon$$

Definamos entonces:

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} B_k, \quad V = \bigcup_{k=N+1}^{\infty} B_k$$

entonces $E \subset A \cup V \cup Z$, donde $m(Z) = 0$ ($Z = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$)

Entonces $E \subset (E \cap A) \cup V \cup Z$. Por lo tanto,

$$m_e(E) \leq m_e(E \cap A) + m_e(V) + m_e(Z) = m_e(E \cap A) + \varepsilon$$

En consecuncia,

$$m_e(E \cap A) \geq m_e(E) - \varepsilon$$

Esto prueba el corolario. $\square$

5.5. Derivada de funciones monótonas:

Teorema 5.5.1 (Lebesgue-Vitali) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente entonces $f'(x)$ existe (y es finita) en casi todo punto de $[a,b]$. Además $f'(x)$ es integrable en $[a,b]$y vale:*

$$\int_a^b f'(x) \leq f(b) - f(a)$$

Lebesgue probó este teorema con la hipótesis de que f sea continua. Vitali suprimió la hipótesis de que $f(x)$ sea continua.
Para demostrar el teorema introducimos las derivadas de Dini:

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(Derivada superior por la derecha)}$$

$$D_+ f(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(Derivada inferior por la derecha)}$$

$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(Derivada superior por la izquierda)}$$

$$D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(Derivada inferior por la izquierda)}$$

Entonces $f'(x)$ existe (en un punto x) si y sólo si

$$D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x)$$

y además el valor común es finito.
Para trabajar siempre con valores de h positivos observemos que:

$$D^- f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

Vamos a probar que en casi todo punto:

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x), \qquad D^- f(x) \leq D_+ f(x) \tag{5.2}$$

Entonces:

$$D^+ f(x) \leq D_- f(x) \leq D^- f(x) \leq D_+ f(x) \leq D^+ f(x)$$

por lo que ha de valer la igualdad.
Sean u, v números racionales con $u > v > 0$, y consideremos los conjuntos

$$E = E_{u,v} = \left\{ x \in [a, b] / D^+ f(x) > u > v > D_- f(x) \right\}$$

Como

$$\{D^+ f(x) > D_- f(x)\} = \bigcup E_{u,v}$$

donde $u, v \in \mathbb{Q}$ y $u > v > 0$ si probamos que $|E_{u,v}| = 0$ para todo u, v, entonces $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$ en casi todo punto.
Con el fin de ver que $|E| = 0$ (dados u, v fijos) razonamos así:

Sea $t = |E|_e$ y sea $\varepsilon > 0$, entonces existe un abierto G tal que $G \supset E$ y $|G| < t + \varepsilon$. (Notemos que $|E|_e < \infty$ pues $E \subset [a, b]$)

Sea $x \in E$, entonces

$$D_- f(x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} < v$$

Por lo tanto, hay valores de $h > 0$ tan pequeños como se quiera tales que:

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} < v$$

Como G es abierto, podemos además elegir h de modo que $I = [x - h, x] \subset G$. Pongamos $\Delta f(I) = f(x) - f(x - h)$ (el incremento de f en el intervalo I), entonces:

$$\Delta f(I) < v \cdot |I| \text{ (pues } |I| = h)$$

Hay intervalos tan pequeños como quiera que cumplen que:

1. $I \subset G$
2. $\Delta f(I) < v \cdot |I|$

La colección de los intervalos que cumplen estas dos condiciones cubre a E en el sentido de Vitali. Podemos entonces extraer una colección finita disjunta $I_1, I_2, \ldots, I_N$ tal que:

1. $I_k \subset G$ para todo k
2. $\Delta f(I_k) < v \cdot |I_k|$
3. Si
$$F = E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k \right),$$
entonces
$$|F|_e > t - \varepsilon \quad (t = |E|_e)$$

Observemos que si ponemos:

$$F^* = E \bigcap \left(\bigcup_{k=1}^{N} I_k^o \right)$$

(donde I_k^o significa el interior de I_k) seguiremos teniendo que:

$$|F^*| > t - \varepsilon$$

pues si bien $F^* \subset F$, $m_e(F - F^*) = 0$, y

$$m_e(F) \leq m_e(F^*) + m_e(F - F^*) = m_e(F^*)$$

Si $x \in F^*$ entonces $x \in I_k^0$ para algún k. Como $x \in E$ será:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > u$$

Entonces, hay valores tan pequeños de h como quiera tales que:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > u$$

Pongamos $J = [x, x+h]$ entonces: $\Delta f(J) > u|J|$.

Consideramos ahora la colección de todos los intervalos cerrados J tales que $J \subset I_k$ para algún k y $\Delta f(J) > u \cdot |J|$. Por lo anterior, cubren a F^* en el sentido de Vitali.
Podemos entonces, extraer de ellos una sucesión finita disjunta $J_1, J_2, \ldots, J_M$ tal que

1. Cada $J_i \subset I_k$ para algún k
2. $$\Delta f(J_k) > \text{ u.}|J_k|$$
3. Si llamamos
$$H = F^* \cap \left(\bigcup_{i=1}^{M} J_i \right)$$
entonces:
$$|H|_e > |F|_e - \varepsilon$$

Deducimos que:

$$|H|_e > t - 2\varepsilon$$

luego:

$$t - 2\varepsilon < |H|_e \leq \sum_{i=1}^{M} |J_i|$$

en consecuencia,

$$u \cdot (t - 2\varepsilon) < \sum_{i=1}^{M} u \cdot |J_i| < \sum_{i=1}^{M} \Delta(J_i)$$

Como cada J_i está incluido en algún I_k resulta:

$$u \cdot (t - 2\varepsilon) < \sum_{k=1}^{N} \sum_{J_i \subset I_k} \Delta f(J_i)$$

Como f es monótona creciente y los J_i son disjuntos: $\sum_{J_i \subset I_k} \Delta f(J_i) \leq \Delta f(I_k)$

Luego:

$$u \cdot (t - 2\varepsilon) \leq \sum_{k=1}^{N} \Delta f(I_k) < \sum_{k=1}^{N} v|I_k| = v \cdot \sum_{k=1}^{N} |I_k| \leq v \cdot |G| < v \cdot (t + \varepsilon)$$

pues

$$\bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset G$$

y como los intervalos I_k son disjuntos:

$$\left| \bigcup_{k=1}^{N} I_k \right| = \sum_{k=1}^{N} |I_k| \leq |G|$$

Luego

$$u \cdot (t - 2\varepsilon) \leq v \cdot (t + \varepsilon)$$

y al hacer $\varepsilon \to 0$ resulta:

$$u \cdot t \leq v \cdot t$$

Si fuera $t = |E|_e > 0$, entonces $u \leq v$, lo cual es absurdo. Por lo que concluimos que $|E|_e = 0$.

Con esto probamos que en casi todo punto: $D^+ f(x) \leq D_- f(x)$

Para probar que $D^- f(x) \leq D_+ f(x)$ se puede usar un argumento análogo o aplicar lo anterior a $g(x) = -f(-x)$ (g es monótona creciente).

Hemos probado pues, que en casi todo punto:

$$D^+ f(x) = D_+ f(x) = D^- f(x) = D_- f(x)$$

Llamemos $f'(x)$ al valor común (posiblemente infinito)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Como

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$$

se deduce que $f'(x)$ es medible.

Vamos a probar que $f'(x)$ es integrable en $[a,b]$:
Como f monótona, los puntos de discontinuidad de f son a lo sumo numerables, y por lo tanto los puntos de continuidad de f son densos en $[a,b]$
Sean $\alpha, \beta \in [a,b]$ con $\alpha < \beta$ puntos de continuidad. Entonces, por el lema de Fatou

$$\int_\alpha^\beta f'(x)\, dx \leq \liminf_{h\to 0} \int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, dx$$

Pero:

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, dx = \frac{1}{h}\left\{\int_\alpha^\beta f(x+h)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_{\alpha+h}^{\beta+h} f(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\int_{\beta}^{\beta+h} f(x)dx - \int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx\right\}$$

Cuando $h \to 0$,

$$\frac{1}{h}\int_\alpha^{\alpha+h} f(x)dx \to f(\alpha)$$

y

$$\frac{1}{h}\int_\beta^{\beta+h} f(x)dx \to f(\beta)$$

por ser α y β puntos de continuidad (teorema fundamental del cálculo), luego

$$\lim_{h\to 0} \int_\alpha^\beta \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\, dx = f(\beta) - f(\alpha)$$

el límite inferior es en realidad el límite)

Luego:

$$\int_\alpha^\beta f'(x)dx \leq f(\beta) - f(\alpha)$$

y haciendo $\alpha \to a$, $\beta \to b$ resulta (por el teorema de Beppo Levi ya que $f'(x) \geq 0$) que:

$$\int_a^b f'(x)\, dx \leq f(b^-) - f(a^+) \leq f(b) - f(a)$$

Luego $f'(x)$ es integrable y en particular es finita en casi todo punto. Con esto queda probado el teorema.

5.6. Funcionnes de variación acotada (de variación finita)

Definición 5.6.1 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Para cada partición π de $[a,b]$*

$$\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

consideramos la suma

$$S(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

Definimos la variación de f en $[a,b]$ por

$$V_a^b(f) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π de $[a,b]$. Claramente $0 \leq V_a^b(f)$. Las funciones f que verifican $V_a^b(f) < +\infty$ se llaman funciones de variación acotada (Camile Jordan)

Propiedades

Proposición 5.6.2 (Aditividad de la variación respecto al intervalo) *Si $a < c < b$ entonces $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$*

Demostración: Consideramos una partición arbitraria

$$\Pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

de $[a,b]$. Consideremos la partición Π' la partición que consiste en agregar a Π el punto c como punto de subdivisión.

Supongamos que $x_i < c < x_{i+1}$, entonces

$$\Pi' : a = x_0 < x_1 << x_i < c < x_{i+1} < \ldots < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Entonces: $S(f,\Pi) \leq S(f,\Pi')$ ya que:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(c)| + |f(c) - f(x_i)|$$

Podemos descomponer Π' como $\Pi_1 \cup \Pi_2$ donde

$$\Pi_1 : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < c$$

que es una partición de $[a,c]$ y

$$\Pi_2 : c < x_{i+1} < \ldots < x_2 < \ldots < x_n = b$$

es una partición de $[c,b]$

Entonces, por la definición de variación temos que:

$$S(f,\Pi) \leq S(f,\Pi') = S(f,\Pi_1) + S(f,\Pi_2) \leq V_c^a(f) + V_c^b(f) \tag{5.3}$$

Entonces tomando supremo sobre todas las particiones Π de $[a,b]$ tenemos que:

$$V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Para probar la desigualdad opuesta, consideramos una partición

$$\Pi_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = c \text{ de } [a,c]$$

y otra partición

$$\Pi_2 : c = x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < ... < x_m = b \text{ de } [c,b]$$

Entonces,

$$\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b$$

es una partición de $[a,b]$ y tenenos:

$$V_a^b \geq S(f,\Pi) = S(f,\Pi_1) + S(f,\Pi_2)$$

Tomando supremo sobre todas las particiones Π_1 de $[a,c]$ tenemos

$$V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + S(f,\Pi_2)$$

que vale para cualquier partición Π_2 de $[c,b]$. Luego, tomando supremo sobre todas las posibles Π_2 tenemos que:

$$V_a^b(f) \geq V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

Por lo que vale la igualdad. □

Teorema 5.6.3 (Descomposición de Jordan) *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada en $[a,b]$ si y sólo si se puede escribir como diferencia de funciones monótonas crecientes.*

Demostración:
2) Concideramos una función f de variación acotada. Se deduce de lo anterior que si ponemos $v(x) = V_a^x(f)$ es una función monótona creciente.

Consideramos $u(x) = v(x) - f(x)$ (de modo que $f = v - u$). Vamos a probar que $u(x)$ es monótona creciente: si $a \leq x < y \leq b$

$$u(y) - u(x) = v(y) - v(x) - [f(y) - f(x)] \geq V_x^y(f) - |f(y) - f(x)| \geq 0$$

(x, y sólos son una partición Π de $[x,y]$ y $S(f,\Pi) = |f(y) - f(x)|$) luego $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y(f)$)

Entonces tenemos que si f es de variación acotada, entonces podemos escribirla como $f = v - u$ con u, v monótonas crecientes.

Para probar el recíproco, notemos que si f es monótona creciente entoces

$$V_a^b(f)f(b) - f(a)$$

Como $V_a^b(f+g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ y $V_a^b(\lambda \cdot f) = |\lambda| \cdot V_a^b(f)$ se deduce que la suma de funciones de variación acotada, y el producto por un número real de una función de variación acotada son de variación acotad (es decir que las funciones de variación acotada forman un espacio vectorial real] Luego si $f = u - v$ con u,v monótonas crecientes, entonces f es de variación acotada. $\square$

Corolario 5.6.4 *Las funciones f de variación acotada en $[a,b]$ tienen las siguientes propiedades (que se deducen de las correspondientes propiedades de las funciones monótonas)*

1. *En cada punto existen los límites laterales $f(x+)$ y $f(x-)$.*
2. *Los puntos de discontinuidad son a lo sumo numerables.*
3. *Son derivables en casi todo punto y $f' \in L^1([a,b])$*

Observación 5.6.5 *Las funciones f de variación acotada en $[a,b]$ forman un espacio de Banach $VA[a,b]$ definiendo:*

$$\| f \| = |f(a)| + V_a^b(f)$$

(En general $V_a^b(f) = 0$ sólo implica que f es constante, el término $|f(a)|$ hace que si $\| f \| = 0$ entoces $f = 0$)

5.7. Funciones absolutamente continuas

Sea $f \in L^1(a,b)$ y consideremos una función "integral indefinida" de f, es decir $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$F(x) = C + \int_b^a f(t)dt$$

siendo C una constante.

Si consideramos en el intervalo $[a,b]$ una famila finita cualquiera de subintervalos disjuntos $I_i = (a_i, b_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} |F(b_i) - F(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |f(t)|dt = \int_A |f(t)|$$

donde

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

pues los intervalor I_i eran disjuntos.

En consecuencia, por la absoluta continuidad de la integral:

$$\sum_{i=1}^{n} |F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \varepsilon$$

siempre que

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(I_i) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \varepsilon$$

Así pues, hemos demostrado que la integral indefinida de una función $f \in L^1(a,b)$ es absolutamente continua en el sentido de la definición siguiente:

Definición 5.7.1 *Diremos que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es* **absolutamente continua** *en $[a,b]$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier familia finita de intervalos disjuntos $I_i = (a_i, b_i) \subset [a,b]$ se tiene que si*

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

Observemos que las funciones absolutamente continuas forman un espacio vectorial que notaremos $AC[a,b]$.

Ejemplos:

1. Toda función Lipschitziana, esto es que verifique una acotación de la forma

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y| \;\forall x, y \in [a,b]$$

   es absolutamente continua. En paticular, cualquier función f continua en $[a,b]$ y con derivada acotada en (a,b) será absolutamente continua (como consecuencia del teorema del valor medio de Lagrange).

2. En cambio, la función de Cantor-Lebesgue (ver apéndice B) es continua y monótona creciente (y por lo tanto de variación acotada) pero no es absolutamente continua, como es fácil ver tomando como los intervalos I_i los intervalos que forman una etapa F_n en la construcción del conjunto de Cantor.

Observación 5.7.2 *Toda función absolutamente continua en $[a,b]$ es uniformenete continua en $[a,b]$.*

Para verlo, basta considerar el caso de una familia formada por un solo intervalo.

Proposición 5.7.3 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua en $[a, b]$, es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración: En la definición de función absolutamente continua, tomamos $\varepsilon = 1$. Entonces consigo un $\delta > 0$, tal que para cualquier familia $I_i = (a_i, b_i)$ de subintervalos disjuntos de $[a, b]$, tenemos que si

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) < \delta$$

Entonces

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i) - f(a_i)| < 1$$

En particular si $x < y$ con $|x - y| < \delta$ son dos puntos cualquiera de $[a, b]$, y elegimos los intervalos I_i para que formen una partición de $[x, y]$, tendremos teniendo en cuenta la defición de variación que:

$$V_x^y(f) \leq 1$$

Ahora consideramos una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ con $|x_{i+1} - x_i| < \delta$. Entonces, por la aditividad de la variación respecto al intervalo:

$$V_a^b(f) = \sum_{i=0}^{n-1} V_{x_i}^{x_{i+1}}(f) < +\infty$$

□

El siguiente lema será clave para generalizar la segunda parte del teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue.

Lema 5.7.4 *(Vitali) Si $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, y $\varphi'(t) = 0$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces φ es constante en $[a, b]$.*

Demostración: Sea

$$E = \{x \in (a, b) : \varphi'(x) \text{ existe y } \varphi'(x) = 0\}$$

Vamos a probar que $m([a, b] - E) = 0$ (luego E es medible y $m(E) = b - a$).
Sea $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ el número que corresponde a ε por la asoluta continuidad de φ.
Consideremos un punto $x \in E$. Entonces:

$$\frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} \to 0 \text{ cuando } |h| \to 0$$

luego si $|h|$ es pequeño:

$$|\varphi(x + h) - \varphi(x)| < \varepsilon |h|$$

o llamando $I = [x, x + h]$,

$$|\Delta\varphi(I)| < \varepsilon \cdot m(I)$$

Los intervalos que tienen esta propiedad cubren a E en el sentido de Vitali. Por el lema de Vitali, podemos entonces elgir una sucesión finita I_k $(1 \leq k \leq n)$ de intervalos cerrados disjuntos de esta familia de modo que:

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) \geq m\left(E \cap (\cup_{k=1}^{n} I_k)\right) > m(E) - \delta = b - a - \delta$$

Entonces, podemos escribir

$$(a, b) - \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \bigcup_{i=1}^{m} J_i$$

siendo los J_i intervalos abiertos disjuntos, y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{m} m(J_i) < \delta$$

(Se trata de la medida de un conjunto elemental)

Vamos a probar que $\varphi(a) = \varphi(b)$ (Del mismo modo se probaría que $\varphi(x) = \varphi(y)$ para $x, y \in [a, b]$ cualquiera, basta restringirse a un subintervalo). Tenemmos:

$$\begin{aligned}
|\varphi(b) - \varphi(a)| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \Delta\varphi(I_k) + \sum_{i=1}^{m} \Delta\varphi(J_k) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |\Delta\varphi(I_k)| + \sum_{i=1}^{m} |\Delta\varphi(J_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \cdot m(I_k) + \varepsilon
\end{aligned}$$

pues los I_k están en la familia, y las medidas de los J_k (que son disjuntos) suman menos que δ. En consecuencia, tenemos que:

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq (b - a + 1)\varepsilon$$

y como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, debemos tener que $\varphi(a) = \varphi(b)$, como queríamos demostrar. $\square$

El siguiente teorema generaliza la segunda parte del teorema fundamental del cálculo para la integral de Lebesgue:

Teorema 5.7.5 (Vitali) *Si f es absolutamente continua en $[a, b]$, entonces $f' \in L^[a, b]$ y se verifica la regla de Barrow*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$$

Demostración: Como f es absolutamente continua en $[a, b]$, f es de variación acotada en $[a, b]$ (por la proposición 5.7.3). Por el corolario 5.6.4, su derivada f' existe en casi todo punto de $[a, b]$ y es integrable.

Podemos entonces, considerar la función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)\, dt \tag{5.4}$$

Esta función es absolutamente continua, por ser diferencia de dos funciones absolutamente continuas, y por el teorema de diferenciación de Lebesgue (corolario 5.3.6):

$$\varphi'(x) = f'(t) - f'(t) = 0$$

en casi todo punto de $[a, b]$. Por el lema 5.7.4 , φ es constante. Especializándola en $x = b$ y después en $x = a$, obtenemos el teorema. □

Ejemplos y Observaciones:

1. Este resultado se aplica en particular a toda función con derivada acotada en $[a, b]$. En cambio, para la integral de Riemann no es cierto, ya que como muestra un contraejemplo construido por Volterra, existen funciones con derivada acotada pero no integrables en el sentido de Riemann (ver [Mon08], ejemplo 1.13).

2. El requerimiento de que f sea absolutamente continua es esencial, como muestra el ejemplo de la función de Cantor-Lebesgue en $[0, 1]$.

3. En cambio, la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

posee una derivada no acotada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x} \ \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

El teorema 5.7.5 no es aplicable a este ejemplo ya que f no es de variación acotada, y en particular no es absolutamente continua (ver [Bri08], ejemplo 9.17). Por la observación que hicimos al comienzo de esta sección, se sigue que f' no puede ser integrable en el sentido de Lebesgue en $[0, 1]$.

Existen integrales más generales que la de Lebesgue para los que el teorema fundamental del cálculo se verifica sin restricciones (y en particular a la función de este ejemplo), como la de Henstock-Kurzweil (ver [Bri08], [Mon08]). Pero no desarrollaremos este tema en este curso.

5.8. La Descomposición de Lebesgue para Funciones de Variación Acotada

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Sabemos que entonces $f'(x)$ existe para casi todo $x \in [a, b]$ y $f' \in L^1[a, b]$. Podemos entonces considerar la función g

$$g(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

Entonces g es absolutamente continua en $[a, b]$, y en virtud del teorema de diferenciación de Lebesgue, $g'(x) = f'(x)$ en casi todo $x \in (a, b)$.

Entonces, si llamamos $h(x) = f(x) - g(x)$, tenemos que $h'(x) = 0$ en casi todo punto de (a, b). Una función tal que $h'(x) = 0$ en casi todo punto se llama una **función singular**.

Ejemplo: La función de Cantor-Lebesgue (definida en la práctica 0) es un ejemplo de una función singular no constante.

De modo que hemos podido expresar a cualquier función de variación acotada en la forma $f(x) = g(x) + h(x)$ donde g es absolutamente continua, y g es singular.

Teorema 5.8.1 *(Descomposición de Lebesgue) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de una función de variación acotada, entonces se la puede descomponer en la forma $f = g + h$, donde g es absolutament continua en $[a, b]$, y h es singular en $[a, b]$.*

Se deduce del lema 5.7.4 que dicha descomposición es única salvo constantes en el siguiente sentido:. si $f = \tilde{g} + \tilde{h}$ es otra desscomposición de f como suma de una función absolutamente continua $\tilde{g}$ y una función singular $\tilde{h}$ entonces $g - \tilde{g} = \tilde{h} - h$ es una función que es a la vez absolutamente continua y singular, y por lo tanto debe ser constante.

Nota sobre la bibliografía: Seguimos esencialmente la exposición en los libros de Fava y Zó [FZ96], y Wheeden y Zygmund [WZ77]. Para profundizar en la teoría de diferenciación para integrales en $\mathbb{R}^d$ puede consultarse el libro de Miguel de Guzmán [dG76].

Una prueba alternativa del teorema 5.5.1, puede encontrarse en los libros de Riesz-Nagy [RSN90] y Kolmogorov-Fomín [FK72], utilizando un lema de F. Riesz conocido como el *lema del sol naciente*. La misma ténica puede usarse para probar en $\mathbb{R}$ la desigualdad maximal (5.1) (ver [Gar07]). Otra prueba diferentes de la diferenciabilidad en casi todo punto de las funciones de variación acotada aparece en el artículo de D. Austin [Aus65].

Una prueba alternativa del teorema 5.7.5, basado en la prueba del teorema de Radon-Nikodym que expondremos en el capítulo siguiente, aparece en el artículo de D. Bárcenas [B0́0]

Notas históricas: La primera versión del lema de Vitali apareció en su paper [Vit08] de 1908. Hardy y Littlewood introdujeron su función maximal en el caso unidimensional en su artículo [HL30] de 1930. La versión n-dimensional y la versión simplificada del lema de Vitali se deben a Wiener [Wie39]. Para más información, pueden consultar a [Duo07].

Capítulo 6

El Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

6.1. Medidas complejas

Definición 6.1.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible (esto es Ω es un conjunto al que llamaremos espacio y $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ una σ-álgebra, a cuyos elementos llamaremos conjuntos medibles). Una función $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ se denomina una* **medida compleja** *si*

1. $\lambda(\emptyset) = 0$

2. *λ es σ-aditiva: esto significa que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ es una sucesión de subconjuntos medibles disjuntos entonces*

$$\lambda\left(\bigcup A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

   Notemos que esto implica que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

   debe ser absolutamente convergente, pues la serie debe sumar lo mismo en cualquier orden que consideremos los conjuntos (A_n).

Si $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, se dice que λ es una **medida signada** *(o a veces, una carga). Notemos que no le estamos permitiendo a λ tomar valores infinitos.*

Ejemplo: Si $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida, y $f \in L^1(\Omega)$, entonces

$$\lambda_f(E) = \int_E f(x)\, d\mu(x) \; (E \in \mathcal{M})$$

es una medida compleja.

Definición 6.1.2 *Si $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ es una medida compleja, definimos la variación de λ, notada por $|\lambda| : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$, como la función dada por:*

$$|\lambda|(E) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)|$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (E \in \mathcal{M})$$

de E en una cantidad numerable de conjuntos medibles disjuntos.

La noción de variación de una medida es la análoga para medidas a la noción de variación de una función real en un intervalo (que introdujimos al hablar de funciones de variación acotada).

Ejercicio: En la definición de la variación, resulta equivalente tomar particiones finitas o numerables.

Observación: $|\lambda|$ es creciente, o sea si $E \subset F$, se tiene que $|\lambda|(E) \leq |\lambda|(F)$.

Para demostrar esta observación, basta observar que si $(E_n)_{n \in N}$ es una partición de E, entonces agrgando a dicha partición el conjunto $F - E$, obtenemos una partición de F, en consecuencia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| + |\lambda(E - F)| \leq |\lambda|(F)$$

y tomando supremo, obtenemos que

$$|\lambda|(E) + |\lambda(E - F)| \leq |\lambda(F)|$$

Lo que en particular dice que $|\lambda|(E) \leq |\lambda|(F)$.

Teorema 6.1.3 *$|\lambda|$ es una medida no negativa, y finita.*

Demostración: Es claro que $|\lambda|(\emptyset) = 0$. Hemos de probar pues que $|\lambda|$ es σ-aditiva. Es decir, que si un conjunto E se escribe como una unión numerable de conjuntos medibles disjuntos:

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad (E_n, E \in \mathcal{M})$$

se tiene que

$$|\lambda|(E) = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n)$$

Probaremos primero que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) \leq |\lambda|(E) \tag{6.1}$$

Notamos que podemos suponer que $|\lambda|(E) < +\infty$; y entonces, como $|\lambda|$ es creciente, $|\lambda|(E_n) < +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tomemos pues, para cada n, una partición de E_n, en conjuntos $E_{n,m}$ medibles disjuntos:

$$E_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_{n,m}$$

de modo que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(E_{n,m})| > |\lambda|(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Reuniendo todas estas particiones, obtenemos una partición de E,

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{n,m}$$

luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(E_{n,m})| \leq |\lambda|(E)$$

En consecuencia,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(|\lambda|(E_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq |\lambda|(E)$$

es decir que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) - \varepsilon \leq |\lambda|(E)$$

y como ε es arbitrario, obtenemos (6.1).

Ahora probaremos que:

$$|\lambda|(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n) \tag{6.2}$$

Nuevamente, podemos suponer que $|\lambda|(E_n) < +\infty$ para todo n. Consideremos una partición (A_m) cualquiera de E en conjuntos medibles disjuntos. Entonces

$$A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_m \cap E_n) \quad \text{(unión disjunta)}$$

y como λ es una medida compleja, tenemos que:

$$\lambda(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_m \cap E_n)$$

y por lo tanto:

$$|\lambda(A_m)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_m \cap E_n)|$$

Sumando en m tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(A_m)| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_m \cap E_n)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(A_m \cap E_n)|\end{aligned}$$

donde el intercambio en el orden de las sumas está justificado, pues los términos son no negativos.Pero

$$E_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E_n \cap A_m)$$

es una partición de E_n, y en consecuencia:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(E_n \cap A_m)| \leq |\lambda|(E_n)$$

Sustituyendo deducimos que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\lambda(A_m)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|(E_n)$$

Como esta desigualdad vale para cualquier partición $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de E, tomando supremo obtenemos (6.2).

Nos queda demostrar que $|\lambda|$ es finita, para lo cual bastará probar que $|\lambda|(\Omega) < +\infty$. Supongamos incialmente que λ es una medida signada (esto es, toma valores reales). Razonando por el absurdo, estableceremos primero el hecho siguiente:

Lema 6.1.4 *Si $\lambda : \mathcal{M}$ es una medida signada y $E \in \mathcal{M}$ es tal que $|\lambda|(E) = +\infty$, entonces existe una descomposición de E en dos conjutnos medibles disjuntos A y B tales que $|\lambda(A)| > 1$ y $|\lambda(B)| > 1$, y $|\lambda|(A) = +\infty$*

Demostración: En efecto, si $|\lambda|(E) = +\infty$, dado $t > 0$, existirá una partición (E_n) de E tal que

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(E_n)| > t$$

En esta suma, separamos los términos de acuerdo al signo de $\lambda(E_n)$, definiendo entonces las sumas:

$$S^+ = \sum_{n:\lambda(E_n)\geq 0} \lambda(E_n)$$

$$S^- = -\sum_{n:\lambda(E_n)<0} \lambda(E_n)$$

de modo que $S = S^+ + S^-$. Debe ser $S^+ \geq \frac{1}{2}S$ o $S^- \geq \frac{1}{2}S^-$.

Definamos los conjuntos

$$A = \bigcup_{n:\lambda(E_n)\geq 0} E_n$$

$$B = \bigcup_{n:\lambda(E_n)<0} E_n$$

Entonces,

$$|\lambda(A)| = \lambda(A) = S^+$$

$$|\lambda(B)| = -\lambda(B) = S^-$$

Pero, entonces si suponemos que $S^+ \geq \frac{1}{2}S$, tendremos

$$|\lambda(A)| \geq \frac{1}{2}S > \frac{t}{2}$$

y

$$|\lambda(B)| = |\lambda(E) - \lambda(A)| \geq |\lambda(A)| - |\lambda(X)| \geq \frac{t}{2} - |\lambda(E)|$$

Como $|\lambda(E)|$ es finito, eligiendo t suficientemente grande, conseguiremos que $|\lambda(A)| > 1$ y que $|\lambda(B)| > 1$.

Si no sucede que $S^+ \geq \frac{1}{2}S$, necesariamente se tiene que $S^- \geq \frac{1}{2}S$, e intercambiando los roles de los conjuntos A y B obtenemos la misma conclusión.

Finalmente, observemos que como $|\lambda|(E) \leq |\lambda|(A)+|\lambda|(B)$, debe ser $|\lambda|(A) = +\infty$ o $|\lambda(B)| = +\infty$. En el primer caso, hemos conseguido demostrar nuestra afirmación. En el segundo, es suficiente intercambiar los nombres de A y B. $\square$

Demostrada que fue nuestra afirmación auxiliar, procedemos del siguiente modo: continuado el razonamiento por el absurdo, si $|\lambda|(\Omega) = +\infty$, podemos conseguir por la dicha afirmación una partición $\Omega = A_1 \cup B_1$ de Ω en dos conjuntos disjuntos $A_1 = A$ y $B_1 = B$ tales que

$$|\lambda(A_1)| > 1, |\lambda(B_1)| > 1, |\lambda|(A_1) = +\infty$$

Como $|\lambda|(A_1) = +\infty$, volviendo a aplicar el lema, podemos conseguir una partición $A_1 = A_2 \cup B_2$ de A_1 en dos conjuntos medibles disjuntos tales que:

$$|\lambda(A_2)| > 1, |\lambda(B_2)| > 1, |\lambda|(A_2) = +\infty$$

En general, podemos repetir infinitas veces en forma inductiva. Dados A_n y B_n, podemos conseguir, en virtud del lema, una partición $A_n = A_{n+1} \cup B_{n+1}$ de modo que se verifique que:

$$|\lambda(A_{n+1})| > 1, |\lambda(B_{n+1})| > 1, |\lambda|(A_{n+1}) = +\infty$$

Pero notemos que los conjuntos $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman, por construcción, una sucesión disjunta. Entonces, la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n)$$

debe ser absolutamente convergente. Esto está en contradicción con el hecho de $|\lambda(B_n)| > 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta contradicción provino de suponer que $|\lambda|(\Omega) = +\infty$. En consecuencia, debe ser $|\lambda|(\Omega) < +\infty$.

Finalmente, nos queda considerar el caso en que λ puede tomar valores complejos. Pero en este caso, podemos escribirla como $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, siendo λ_1, λ_2 medidas signadas, y claramente:

$$|\lambda|(\Omega) \leq |\lambda_1|(\Omega) + |\lambda_2|(\Omega) < +\infty$$

□

Observación: La variación de λ verifica que:

$$|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E) \; \forall \, E \in \mathcal{E}$$

y es la menor medida con esta propiedad: Si μ es otra medida no negativa tal que

$$|\lambda(E)| \leq \mu(E) \; \forall \, E \in \mathcal{E}$$

entonces $|\lambda|(E) \leq \mu(E)$.

Corolario 6.1.5 *(Descomposición de Hahn) Si $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ es una medida signada, es posible escribirla en la forma $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, donde $\lambda^+, \lambda^- : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ son medidas positivas y finitas.*

Demostración: Es suficiente tomar:

$$\lambda^+ = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda)$$

$$\lambda^- = \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

□

Ejemplo: La descomposición de Hahn es la análoga para medidas, a la descomposición de Jordan de una función de variación acotada como diferencia de dos funciones crecientes. De hecho, si F es una función de variación acotada, μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada, y

$$F = F_1 - F_2$$

es su descomposición de Jordan, entonces

$$\mu_F = \mu_{F_1} - \mu_{F_2}$$

siendo μ_{F_1} y μ_{F_2} las medidas de Lebesgue-Stieltjes correspondientes a F_1 y a F_2, es la descomposición de Hahn de μ_F.

Ejercicio: Si $(X, \mathcal{M})$ es un espacio medible, entonces el conjunto

$$\mathbb{M}(X) = \{\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C} : \lambda \text{ es una medida compleja } \}$$

es un espacio de Banach con la norma definida por la variación total de λ:

$$\|\lambda\| = |\lambda|(X)$$

6.2. Absoluta continuidad. Medidas Singulares

Definición 6.2.1 *Sean $(\Omega, \mathcal{M})$ un espacio medible, μ una medida no negativa sobre $\mathcal{M}$ que puede valer $+\infty$ y $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ una medida compleja*

Diremos que λ es **absolutamente continua** *con respecto a μ (y lo simbolizaremos $\lambda \ll \mu$) para cualquier conjunto $E : \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$*

Ejemplo: Si $f \in L^1(\Omega, \mu)$, $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu$$

es una medida compleja absolutamente continua con respecto a μ.

Definición 6.2.2 *Diremos que λ esta concentrada en un conjunto A (y lo simbolzaremos $\lambda \subset A$) si*

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$$

para cualquier conjunto medible E.

Lema 6.2.3

1. *λ está concentrada en A si y sólo si $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathcal{M}$ tal que $E \cap A = \emptyset$*

2. *Si $\lambda \subset A$ y $A \subset B$, entonces $\lambda \subset B$.*

3. *Si $\lambda \subset A$ y $\lambda \subset B$, entonces $\lambda \subset A \cap B$*

Demostración: Prueba de i): La implicación $\Rightarrow$) es trivial. Para probar la implicación $\Leftarrow$) notemos que

$$\lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap A^c)$$

pero $\lambda(E \cap A^c) = 0$ pues $E \cap A^c \cap A = \emptyset$, luego $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$.

Prueba de ii): $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$ por ser $\lambda \subset A$, pero $\lambda(E \cap A) = \lambda(E \cap A \cap B)$ pues $E \cap A = E \cap A \cap B$ y $\lambda((E \cap B) \cap A) = \lambda(E \cap B)$ pues $\lambda \subset A$, luego $\lambda(E) = \lambda(E \cap B) \Rightarrow \lambda \subset B$.

Prueba de iii): Como $\lambda \subset A \Rightarrow \lambda((E \cap B) \cap A) = \lambda(E \cap B)$ Pero $\lambda(E \cap B) = \lambda(E)$ pues $\lambda \subset B$ luego $\lambda(E \cap (A \cap B)) = \lambda(E)$. Esto prueba que $\lambda \subset A \cap B$ $\square$

Definición 6.2.4 *Diremos que* λ **es singular** *con respecto a* μ *si está concentrada en un conjunto de medida* μ *nula, o sea si para todo* $E \in \mathcal{M}$, $\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$ *donde* $\mu(A) = 0$. *Escribimos* $\lambda \perp \mu$.

Ejemplo: Consideramos en $\mathbb{R}$ la medida dada por

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \in A \\ 0 & \text{si} \quad 0 \notin A \end{cases}$$

entonces $\delta \subset \{0\}$, y por lo tanto δ es singular respecto a la medida de Lebesgue m: $\delta \perp m$.

Otro Ejemplo: Consideramos en $[0,1] \subset \mathbb{R}$ la medida de Lebesgue-Stieltjes Λ_F (ver sección 3.3) donde F es la función de Cantor-Lebesgue. Entonces Λ_F está concentrada en el conjunto ternario de Cantor $\mathcal{C}$, pues Λ_F asigna medida cero a los intervalos que corresponden a las componentes conexas del complemento de $\mathcal{C}$, en los cuales F es constante. Como $\mathcal{C}$ tiene medida de Lebesgue nula, deducimos que Λ_F es singular respecto a la medida de Lebesgue.

Lema 6.2.5

1. *Si* λ_1, λ_2 *son absolutamente continuas respecto a* μ, *entonces* $c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2$ *es absolutamente continua respecto a* μ.
2. *Análogamente, si* λ_1, λ_2 *son singulares respecto a* μ, *entonces* $c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2$ *es singular respecto a* μ.

(Es decir que las medidas absolutamente continuas y las singulares forman subespacios del espacio de las medidas complejas)

Si λ *es absolutamente continua y singular respecto de* μ *entonces* $\lambda(E) = 0$ *para cualquier* E

Demostración: Prueba de i): Para probar la primera afirmación, supongamos $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \ll \mu$ y sea E tal que $\mu(E) = 0$, entonces $c_1 \cdot \lambda_1(E) + c_2 \cdot \lambda_2(E) = 0$.

Prueba de ii): Supongamos que $\lambda_1 \perp \mu$, $\lambda_2 \perp \mu$. Entonces, $\lambda_1 \subset A_1$ donde $\mu(A_1) = 0$ y $\lambda_2 \subset A_2$ donde $mu(A_2) = 0$.

Vamos a probar que $c_1 \cdot \lambda_1 + c_2 \cdot \lambda_2$ está concentrada en $A_1 \cup A_2$. Como $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, entonces $\lambda_1 \subset A_1 \cup A_2$ y análogamente $\lambda_2 \subset A_1 \cup A_2$

$$c_1 \cdot \lambda_1(E) + c_2 \cdot \lambda_2(E) = c_1 \cdot \lambda_1(E \cap (A_1 \cup A_2)) + c_2 \cdot \lambda_2(E \cap (A_1 \cup A_2))$$

Como

$$\mu(A_1 \cup A_2) \leq \mu(A_1) \cup \mu(A_2) = 0$$

Esto prueba $c_1 \cdot \lambda_1 + c_2.\lambda_2 \perp \mu$.

Prueba de iii): Como $\lambda \ll \mu$,$\lambda(E) = \lambda(E \cap A)$ con $\mu(A) = 0$, pero $E \cap A \subset A$, luego $\mu(E \cap A) = 0$. Entonces $\lambda(E \cap A) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$. □

6.3. Teorema de Lebesgue - Radon - Nikodym

Definición 6.3.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. La medida μ se dice σ-finita si el espacio Ω se puede descomponer como una unión numerable disjunta $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ de conjuntos medibles E_k donde $\mu(E_k) < +\infty$*

Teorema 6.3.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Si λ es una compleja sobre $\mathcal{M}$ entonces existe un único par de medidas (positivas) λ_a y λ_s tales que*

1. *λ_a es absolutamente continua con respecto a μ, λ_s es singular con respecto a μ, y $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$ (Descomposición de Lebesgue)*
2. *Existe una ínica función $h \in L^1(\Omega, \mu)$ tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h \, d\mu \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M} \tag{6.3}$$

(única salvo por igualdad en casi todo punto con respecto a μ)

Efectuaremos la prueba en el caso especial en que tanto λ como μ son medidas no negativas y finitas. Es fácil después extender el teorema al caso general enunciado, utilizando la descomposición de Hahn (Lo dejamos como ejercicio para el lector).

La función h cuya existencia garantiza el teorema se llama la **derivada de Radon-Nikodym** de λ_a respecto a μ, y se denota por

$$\frac{d\lambda_a}{d\mu}$$

Notamos que la unicidad de la descomposción de Lebesgue es una consecuencia inmediata del lema 6.2.5. En consecuencia, nos concentraremos en probar la existencia de dicha descomposición.

6.3.1. Existencia: Un caso especial

Teorema 6.3.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Y supongamos que λ es una medida no negativa tal que*

$$0 \leq \lambda(E) \leq \mu(E) \ \forall \ E \in \mathcal{M}$$

Entonces existe una función $h \in L^1(\mu)$ tal que $\lambda(E) = \int_E h \ d\mu$ para todo $E \in \mathcal{M}$, y $0 \leq h(x) \leq 1$

La idea de la demostración consiste en construir una aproximación h_P de la h buscada, asociada a una partición

$$P = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$$

del espacio Ω en conjuntos medibles (lo que llamaremos en adelante una partición de Ω).

Definimos esta función h_P como la función simple

$$h_P = \sum_{k=1}^{n} p_k \chi_{A_k}$$

donde

$$p_k = \begin{cases} \frac{\lambda(A_k)}{\mu(A_k)} & \text{si} \quad \mu(A_k) > 0 \\ 0 & \text{si} \quad \mu(A_k) = 0 \end{cases}$$

El lema siguiente resume las propiedades claves de h_P:

Lema 6.3.4 *i)*

$$0 \leq h_p(x) \leq 1$$

ii) Si f es cualquier función que es constante en cada uno de los conjuntos A_k de la partición P entonces

$$\int_\Omega f(x) \ d\lambda = \int_\Omega f(x) h_P(x) \ d\mu$$

iii)

$$\lambda(\Omega) = \int_\Omega h_P \ d\mu$$

iv)

$$\int_\Omega h_P(x)^2 \ d\mu = \int_\Omega h_P \ d\lambda \leq \lambda(\Omega)$$

Demostración: i) sale de que como $\lambda \leq \mu$, $0 \leq p_k \leq 1$.

ii) Supongamos que f toma el valor c_k en A_k entonces

$$\int_\Omega f(x) \ d\lambda = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k p_k \mu(A_k) = \int_\Omega f(x) h_P(x) \ d\mu$$

donde usamos que si $\mu(A_k) = 0$ entonces $\lambda(A_k) = 0$.

iii) Es el caso particular en que tomamos f constantemente igual a 1. ii) Sale en particular tomando $f = h_P$ y usando i). □

Esto nos lleva a asociarle a cada partición P la energía

$$E[P] = \int_\Omega h_P(x)^2 \, d\mu$$

Para construir la h del teorema de Lebesgue - Radon - Nikodym, necesitamos refinar la partición P. Una partición $\widetilde{P} = \{B_{kl}\}$ es un refinamiento de la partición P, si se construye partiendo cada A_k en conjuntos medibles disjuntos

$$A_k = \bigcup_{l=1}^{m_k} B_{kl}$$

Tenemos entonces el siguiente lemma

Lema 6.3.5 *Si $\widetilde{P}$ es un refinamiento de P entonces*

$$\int_\Omega (h_P - h_{\widetilde{P}})^2 \, d\mu = \int_\Omega h_{\widetilde{P}}^2 \, d\mu - \int_\Omega h_P^2 \, d\mu$$

En particular la enegía crece cuando refinamos la partición:

$$E[\tilde{P}] \geq E[P]$$

Demostración: Notamos que si $\widetilde{P}$ es un refinamiento de P, entonces h_P es constante en cada conjunto de $\tilde{P}$. Usando entonces el lema anterior tenemos que:

$$\int_\Omega h_P \, d\lambda = \int_\Omega h_P(x) h_{\tilde{P}}(x) \, d\mu$$

Pero

$$\int_\Omega h_P \, d\lambda = \sum_{k=1}^n p_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^n p_k^2 \mu(A_k) = \int_\Omega h_P^2 \, d\mu$$

Luego,

$$\int_\Omega h_P(x) h_{\tilde{P}}(x) \, d\mu = \int_\Omega h_P^2 \, d\mu$$

Entonces desarrollando el cuadrado del binomio:

$$\int_\Omega (h_P - h_{\widetilde{P}})^2 \, d\mu = \int_\Omega h_{\widetilde{P}}^2 \, d\mu - \int_\Omega h_P^2 \, d\mu$$

□

Notamos finalmente, que dadas dos particiones $P_1 = \{A_k\}$ y $P_2 = \{B_l\}$, siempre tenemos un refinamiento común

$$P_1 \cap P_2 = \{A_k \cap B_l\}$$

Hechas estas observaciones, definamos el número

$$M = \sup_P E[P]$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones medibles del espacio Ω. Notamos que este supremo es finito, pues $E[P] \leq \lambda(\Omega)$ por un lema anterior.

Usando la definición de supremo, para cada n podemos encontrar una partición P_n tal que

$$E[P_n] > M - \frac{1}{n}$$

Cambiando P_n por $\widetilde{P_n} = P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n$ (el menor refinamiento común) esta desigualdad continuará verificándose pues la energía crece al refinar la partición. Por lo tanto, ponemos suponer que P_{n+1} es un refinamiento de P_n para todo n.

Hecha esta suposición, si $n \geq m$, P_n es un refinamiento de P_m, y tendremos de nuevo por el lema anterior que

$$\|h_{P_n} - h_{P_m}\|_{L^2}^2 = E[P_n] - E[P_m] \leq M - \left(M - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}$$

Luego la sucesión h_{P_n} es de Cauchy en $L^2(\mu)$. Cmo $L^2(\mu)$ es completo, deducimos que h_{P_n} converge a en $L^2(\mu)$ a una función medible h. Además si recordamos como hemos probado la completitud de L^2, deducimos que existre una sub-sucesión de h_{P_n} que converge a h en casi todo punto respecto a μ. Por lo que $0 \leq h \leq 1$ en casi todo punto de Ω respecto a μ, y cambiando h en un conjunto de medida nula, podemos suponer que esto se verifica en todo punto.

Sea ahora $A \in \mathcal{M}$ cualquiera y llamamos R_n al menor refinamiento común entre P_n y $\{A, A^c\}$. Entonces nuevamente tenmos:

$$\|h_{P_n} - h_{R_n}\|_{L^2}^2 = E[R_n] - E[P_m] \leq M - \left(M - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}$$

y por Cauchy-Schwarz

$$\int_A |h_{P_n} - h_{R_n}| \, d\mu \leq \|h_{P_n} - h_{R_m}\|_{L^2} \, \mu(A)^{1/2} \to 0$$

cuando $n \to +\infty$. Por otro lado, como χ_A es constante en los conjuntos que forman la partición R_n (por ser esta un refinamiento de $\{A, A^c\}$), usando el lema 6.3.4, deducimos que

$$\lambda(A) = \int_\Omega \chi_A \, d\lambda = \int_\Omega \chi_A \cdot h_{R_n} \, d\mu \int_A h_{R_n} \, d\mu$$

Se deduce que

$$\lambda(A) = \lim_{n \to +\infty} \int_A h_{P_n} \, d\mu$$

Como h_{P_n} converge a h en $L^2(\mu)$, de nuevo por Cauchy-Schwarz $h_{P_n} \to h_P$ en $L^1(\mu)$. Concluimos que

$$\lambda(A) = \int_A h \, d\mu$$

como queríamos ver.

6.3.2. El caso general

Para probar el caso general del teorema 6.3.2, razonamos como sigue. En primer lugar, usando la descomposición de Hahn y argumentos de aproximación, podemos reducirnos al caso en las medidas μ y λ son positivas y finitas.

Definimos entonces una nueva medida $\sigma = \lambda + \mu$. Usando el teorema 6.3.2, encontramos funciones h_λ, y h_μ en $L^1(\sigma)$ tales que:

$$\lambda(E) = \int_E h_\lambda \, d\sigma$$
$$\mu(E) = \int_E h_\mu \, d\sigma$$

para todo $E \in \mathcal{M}$, y $0 \leq h_\mu, h_\lambda \leq 1$.

Como $0 \leq h_\mu \leq 1$, podemos particionar a Ω en dos conjuntos medibles disjuntos:

$$S = \{x \in \Omega : h_\mu(x) = 0\}, \quad A = \{x \in \Omega : 0 < h_\mu(x) \leq 1\}.$$

Claramente $\mu(S) = 0$. Definimos para $E \in \mathcal{M}$,

$$\lambda_s(E) = \lambda(E \cap S)$$
$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A)$$

Entonces $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, y claramente λ_s está concentrada en S por lo que es singular con respecto a μ.

Nos falta ver que λ_a es absolutamente continua con respecto a μ, y que puede representarse en la forma (6.3). Definamos h por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{h_\lambda(x)}{h_\mu(x)} & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \in S \end{cases}$$

Entonces

$$\lambda_a(E) = \int_{A\cap E} h_\lambda \, d\sigma = \int_{A\cap E} h \cdot h_\mu \, d\sigma = \int_{A\cap E} h \, d\mu = \int_E h \, d\mu$$

(pues $\mu(E \cap S) = 0$). Concluimos en particular que $h \in L^1(\mu)$ pues:

$$\int_\Omega h \, d\mu = \lambda_a(\Omega) = \lambda(A) < \infty$$

y que λ_a es absolutamente continua respecto a μ.

6.4. La descomposición polar de una medida compleja

Lema 6.4.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita ($\mu(X) < +\infty$), F un subconjunto cerrado del plano complejo $\mathbb{C}$ y $g \in L^1(\mu)$ tal que si $\mu(E) > 0$ entonces:*

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E g(x)\, d\mu \in F$$

entonces $g(x) \in F$ para casi todo $x \in \Omega$ respecto de μ.

Demostración: $\mathbb{C} - F$ es un conjunto abierto del plano complejo. En consecuencia, se puede escribir como una unión numerable de discos cerrados D_n (usando el hecho de que $\mathbb{C}$ es un espaciométrico separable):

$$C - F = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \Rightarrow g^{-1}(\mathbb{C} - S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} g^{-1}(D_n)$$

Si probamos que $\mu(g^{-1}(D_n)) = 0$ resultará que $\mu\left(g^{-1}(\mathbb{C} - F)\right) = 0$ como queremos probar. Supongamos que para algún n fuera $\mu(E) = 0$ con $E = g^{-1}(D_n)$. Sea $D_n = \{z \in \mathbb{C} :\mid z - a \mid\leq r\}$. Si probamos que $s = \frac{1}{\mu(E)} \int_E g d\mu$ (que por hipótesis pertenece a S) pertenece también a D_n esto es absurdo pues $D_n \cap F = \emptyset$.

$$|s - a| = \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E g\, d\mu - a \right| \leq \left| \frac{1}{\mu(E)} \int_E (g - a)\, d\mu - \right| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E |g - a|\ d\mu$$

Si $x \in E$ entonces $g(x) \in D_n \Rightarrow \mid g(x) - a \mid\leq r$, luego

$$|s - a| \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E r\, d\mu = r \Rightarrow s \in D_n$$

Este es un absurdo que proviene de suponer que $\mu(E) > 0$. Luego concluimos que $\mu(E) = 0$. $\square$

Teorema 6.4.2 *Sea $(\Omega.\mathcal{M})$ un espacio medible. Si $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ es una medida compleja, entonces existe una única $h \in L^1(|\lambda|)$ tal que:*

i)

$$\lambda(E) = \int_E h\, d|\lambda|\ \forall\ E \in \mathcal{M}$$

ii)

$$|h(x)| = 1 \textit{ para casi todo } x \in \Omega \textit{ con respecto a } |\lambda|$$

Demostración: Como $|\lambda(E)| \leq |\lambda|(E)$, λ es absolutamente continua con respecto a $|\lambda|$. En consecuencia, por el teorema de Radon-Nikodym existe una única $h \in L^1(|\lambda|)$ tal que

$$\lambda(E) = \int_E h \, d|\lambda|$$

Si $E \in \mathcal{M}, |\lambda|(E) > 0$ tenemos que:

$$\left| \frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E h d|\lambda| \right| = \left| \frac{\lambda(E)}{|\lambda|(E)} \right| \leq 1$$

Aplicando el lema 6.4.1 con $F = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y $\mu = |\lambda|$, deducimos que $h(x) \in F$, es decir que $|h(x)| \leq 1$, para casi todo $x \in \Omega$ con respecto a $|\lambda|$.

Vamos a probar que $|h(x)| = 1$ para casi todo x.

Sea $0 \leq r < 1$ y pongamos $A = \{x \in \Omega : |h(x)| \leq r\}$. Si $E \subset A$,

$$\left| \int_E h \, d|\lambda| \right| \leq \int_E |h| \, d|\lambda| \leq \int_E r \, d|\lambda| \leq r|\lambda|(E)$$

Consideremos ahora una partición de un conjunto de A:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \ (A_k \in \mathcal{M} \text{ disjuntos})$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda(A_i)| \leq \sum_{k=1}^{n} r|\lambda|(A_i) = r|\lambda|(A)$$

pues $|\lambda|$ es una medida. Tomando supremo, obtenemos por la defínción de $|\lambda|$ que

$$|\lambda(A)| \leq r|\lambda|(A)$$

y como $0 < r < 1$, esto implica que: $|\lambda|(A) = 0$.

Finalmente notamos que:

$$\{x \in \Omega : |h(x)| < 1\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \Omega : |h(x)| \leq 1 - \frac{1}{n} \right\}$$

en consecuencia $|\lambda|(\{x \in \Omega : |h(x)| < 1\}) = 0$. Deducimos que $|h(x)| = 1$ en casi todo punto. □

Observación 6.4.3 *La descomposición polar de una medida compleja se puede utilizar para definir la integral*

$$\int_\Omega f d\lambda$$

si $f \in L^1(|\lambda|)$ mediante la fórmula:

$$\int_\Omega f d\lambda = \int_\Omega f h d|\lambda|$$

(donde la h es la del teorema anterior).

Observación 6.4.4 *Para medidas signadas la descomposción polar se reduce a la descomposición de Hahn $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ (corolario 6.1.5). Más aún,*

$$\lambda^+ \subset P, \quad \lambda^- \subset N$$

donde

$$P = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}, \quad N = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

(siendo h es la función dada por el teorema 6.4.2) Además P es un conjunto positivo *para λ, o sea:*

$$\lambda(E) \geq 0 \, \forall \, E \subset P$$

y N es un conjunto negativo *para λ, o sea:*

$$\lambda(E) \leq 0 \, \forall \, E \subset N.$$

Notas: En la primera parte del capítulo, hemos seguido esencialmente la exposición de W. Rudin [Rud87], aunque hemos simplificado la prueba del teorema 6.1.3, al considerar primero el caso de una medida con signo. También se basa en este libro la sección 6.4.

Entre las principales aplicaciones del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym podemos mencionar: la construcción de la esperanza condicional en la teoría de probabilidades , y la determinación del dual de los espacios L^p (pueden encontrarla en el apéndice D).

Existen varias demostraciones del teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. Hemos seguido esencialmente la del artículo de Bradley [Bra89], que aparece expuesta también en el de Barcenas [B0́0] (pero no al pie de la letra), ya que creo que esta demostración es interesante porque da una idea de como construir la derivada da Radon-Nikodym, por medio de ideas íntimamente relacionadas con las propiedades de la esperanza condicional.

Otras demostraciones alternativas que podemos mecionar son:

- En cursadas anteriores, he expuesto la demostración de John Von Neuman basada en el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales continuas sobre un espacio de Hilbert. Pueden encontrarla en el apéndice C junto con los pre-requisitos necesarios sobre espacios de Hilbert. El uso del teorema de representación de Riesz puede evitarse como mostró Schep en [Sch03].
- La demostración de Sellke [Sel02] utiliza la minimización de una funcional cuadrática.
- Wheeden y Zygmund dan en [WZ77] una demostració basada en la descomposición de Hahn de una medida signada.
- Por ultimo mencionamos que una variante de la demostración de Schep sin usar el enfoque de Von Neuman fue posteriormente publicada por el autor en su página personal[1].

[1] `http://people.math.sc.edu/schep/Radon-update.pdf`

Capítulo 7

Convolución y Aproximaciones de la Identidad

7.1. Definicion y propiedades elementales

Definición 7.1.1 *Sean $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones medibles. Su convolución $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se define por:*

$$(f * g)(x) = \int_{R^d} f(x-t)g(t)\, dt$$

Observación 7.1.2 *$f * g = g * f$, o sea:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\, dt$$

Prueba: Hacemos el cambio de variable $u = x - t \Rightarrow t = x - u$ (Notamos que el valor absoluto del módulo del jacobiano del cambio de coordenadas es 1)

Lema 7.1.3 *Si es medible en $\mathbb{R}^d$, entonces $F(x,t) = f(x-t)$ es medible en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$*

Demostración: Sea $F_1(x,t) = f(x)$. Como f es medible, se sigue que $F_1(x,t)$ es medible en $\mathbb{R}^{2d}$:

$$\{(x,t) : F_1(x,t) > a\} = \{(x,t) : f(x) > a\} =$$
$$= \{x : f(x) > a\} \times \mathbb{R}^d \Rightarrow \text{ es medible pues } \{x : f(x) > a\} \text{ es medible}$$

Para (ξ, η) en $\mathbb{R}^{2d}$ consideramos la transformación $x = \xi - \eta, y = \xi + \eta$. Es una transformación lineal no singular, entonces es Lipschitz y por lo tanto aplica conjuntos medibles en conjuntos medibles.

Se sigue que la función $F_2(\xi,\eta) = F_1(\xi-\eta,\xi+\eta)$ es así mismo medible. Como $F_2(\xi,\eta) = f(\xi-\eta)$ esto prueba el lema. □

Teorema 7.1.4 *Si $f,g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $(f*g)(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además $f*g \in L^1$ y $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.*

Demostración: Supongamos primero que f y g son no negativas entonces $f(x-t)g(t)$ es medible en $\mathbb{R}^{2d}$ ya que por el lema anterior es el producto de dos funciones medibles, entoonces la integral

$$I = \int\int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x-t)g(t)\,dx\,dt$$

está bien definida, y aplicando el teorema de Fubini-Tonelli, encontramos que:

$$I = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)g(t)dt\right)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-t)g(t)dt\right)dx$$

$$= \int_{R^d}(f*g)(x)\,dx$$

y por otro lado:

$$I = \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t\,dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\,dx\right)dt =$$

Gracias a la invariancia por traslaciones de la integral, podemos cambiar $x-t$ por x:

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right)dt = \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(t)\,dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx\right)$$

Por lo tanto obtenemos que si f y g son medibles y no negativas

$$\int_{\mathbb{R}^d}(f*g)dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} g(t)dt\right)$$

Esto prueba el teorema si $f,g \geq 0$

Observación: En probabilidades por ejemplo esto dice que si f y g son densidades de probabilidad $\Rightarrow f*g$ también. (Da la densidad de la suma de dos variables aleatorias independientes)

Para el caso general basta observar que:

$$|\,(f*g)(x)\,| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|\,|g(t)|\,dt = |f|*|g|$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f*g|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^d}(|f|*|g|)\,dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d}|f|\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}|g|\,dx\right) = \|f\|_1\|g\|_1$$

Esto prueba el teorema. □

Observación: El teorema anterior significa que $*$ es un producto en L^1 con el cual L^1 es un álgebra de Banach.

7.2. Desigualdad de Young

Teorema 7.2.1 *Sea $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y*

$$\| f * g \|_p \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_1$$

Demostración: Como antes usando que $|f * g| \leq |f| * |g|$ podemos suponer que $f, g \geq 0$. Para $p = 1$ el resultado *ya* fue probado.

Para $p = \infty$ notamos que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) dt \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t) dt = \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Por lo tanto:

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Supongamos pues que $1 < p < \infty$. Aplicando entonces la desigualdad integral de Minkowski (Teorema 4.7.1), obtenemos que

$$\|f*g\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{R^n} f(x-t) g(t) \, dt \right)^p dx \right)^{1/p} dx \leq \int_{R^n} \left(\int_{R^n} |f(x-t)|^p |g(t)|^p dx \right)^{1/p} dt$$

$$= \int_{R^n} |g(t)| \left(\int_{R^n} |f(x-t)|^p \, dx \right)^{1/p} dt = \int_{R^n} |g(t)| \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} dt$$

$$= \int_{R^n} |g(t)| \cdot \|f\|_p dt = \|f\|_p \int_{R^n} |g(t)| dt \|f\|_p \|g\|_1$$

$\square$

Una prueba alternativa: También es posible probar este teorema sin acudir a la desigualdad integral de Minkowski. Sea q el exponente conjugado de p, de modo que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t)^{1/p} g(x-t)^{1/q} \, dt$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$(f*g)(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(t)^p g(x-t) \, dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x-t) \, dt \right)^{1/q} = (f^p * g)^{1/p} \| g \|_1^{1/q}$$

Elevando ambos miembros a la potencia p e integrando el resultado:

$$\int_{\mathbb{R}^d} [(f * g)(x)]^p dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} (f^p * g) dx \right) \| g \|_1^{p/q}$$

Pero

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f^p * g)\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^d} f^p\, dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\, dx \right)$$

Por lo tanto:

$$\|f * g\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) dx \leq \|f\|_p^p\, \|g\|_1\, \|g\|_1^{p/q} = \|f\|_p^p \|g\|_1^p$$

Tomando raíz p-ésima resulta:

$$\|f * g\|_p \leq \; \|f\|_p\, \|g\|_1$$

como queríamos probar.

Observación 7.2.2 *Una convolución $f \to f * K$ con K fijo define una transformación $T(f) = f * K$ se llama un operador de convolución con núcleo K. El teorema anterior muestra que si K es integrable este operador aplica L^p en L^p.*

Vale un teorema más general:

Teorema 7.2.3 (Young) *Si p, q satisfacen $1 \leq p, q \leq \infty$ y $1/p + 1/q \geq 1$ y r se define por $1/r = 1/p + 1/q - 1$ entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ entonces $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ y se tiene:*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$$

Demostración: Podemos suponer $f, g \geq 0$. Cuando $p, q, r > 0$, escribimos [1]

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)^{p/r}\, g(x-t)^{q/r}\, f(t)^{p(1/p-1/r)}\, g(x-t)^{q(1/q-1/r)}\, dt$$

Aplicamos entonces la desigualdad generalizada de Hölder con tres exponentes r, p_1 y p_2 donde $1/p_1 = 1/p - 1/r$ y $1/p_2 = 1/q - 1/r$. Obtenemos que:

$$(f * g)(x) \leq \left(\int_{R^n} f(x)^p\, g(x-t)^q\, dt \right)^{1/r} \|f\|_p^{p/p_1}\, \|g\|^{q/p_2}$$

(En el último factor hemos utilizado la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue). Elevando a la r e integrando, deducimos que

$$\|f * g\|_r^r \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{R^n} f(x)^p\, g(x-t)^q\, dt \right) dx\, \|f\|_p^{pr/p_1}\, \|g\|^{qr/p_2}$$

Usando el teorema de Fubini-Tonelli y la invariancia por traslaciones, tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\, g(x-t)^q\, dt \right) dx = \|f\|_p^p\, \|g\|_q^q$$

[1] Siguiendo la idea en el ejercicio 2 del capítulo 9 de [WZ77]

Consecuentemente sustituyendo,

$$\|f * g\|_r^r \leq \|f|_p^{pr/p_1+p} \|g\|_q^{qr/p_2+q}$$

o sea

$$\|f * g\|_r \leq \|f|_p^{p/p_1+p/r} \; \|g\|_q^{p/p_2+q/r}$$

Teniendo en cuenta la elección de los exponentes p_1 y p_2, se obtiene la desigualdad del enunciado. □

Observación 7.2.4 *La constante óptima en la desigualdad de Young*

$$\|f * g\|_r \leq C(p,q,r)\|f\|_p \; \|g\|_q$$

no es 1. *Ha sido calculada por W. Beckner en [Bec75]. Una prueba más elemental fue dada por F. Barthe [Bar98].*

7.3. El soporte y la convolucion

Definición 7.3.1 *El soporte de $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se define por:*

$$Sop(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}$$

(siempre es cerrado)

Corolario 7.3.2 *Si $x \notin Sop(f)$, existe un entorno de x donde f se anula.*

Observación 7.3.3 *Con esta definición no vale que si $f = g$ en casi todo punto $Sop(f) = Sop(g)$ (Brézis [Bre84] lo define entonces por la condición de que $x \notin Sop(f) \Leftrightarrow$ existe un abierto U tal que $x \in U$ y $f = 0$ en casi todo punto de U*

Proposición 7.3.4 *Si f y g tienen soporte compacto, entonces $f * g$ tiene soporte compacto. Además:*

$$Sop(f * g) \subseteq Sop(f) + Sop(g)$$

Demostración:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)dt = \int_{\mathrm{Sop}(f)} f(x)g(x-t)dt$$

pues si $t \notin$ Sop(f) $\Rightarrow f(t) = 0$

Análogamente si $x - t \in \mathrm{Sop}(g) \Leftrightarrow t \in x - \mathrm{Sop}(g)$,luego $g(x-t) = 0$ si $t \notin x - sop(g)$. Se deduce que:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathrm{Sop}(f) \cap (x - \mathrm{Sop}(g)))} f(x)g(x-t)\; dt$$

Si $(f * g)(x) \neq 0 \Rightarrow \ \mathrm{Sop}(f) \cap (x - \mathrm{Sop}(g)) \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in \mathrm{Sop}(f) \cap (x - \mathrm{sop}(g))$. Pero como $y \in x - \mathrm{Sop}(g) \Rightarrow y = x - w$ con $w \in \mathrm{Sop}(g)$. Así pues $x = y + w$ con $y \in \mathrm{Sop}(f)$, $w \in \mathrm{Sop}(g)$

Así vimos que $\{(f*g) \neq 0\} \subseteq sop(f)+sop(g)$, pero la suma de dos compactos es compacto (no vale para cerrados) por lo tanto

$$\mathrm{Sop}(f * g) \subseteq sop(f) + sop(g)$$

$\square$

Teorema 7.3.5 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y K es acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}^d$, entonces $f * K$ es acotada y uniformemente continua.*

Demostración: Veamos que $f*K$ es uniformemente continua. Si $f = 0 f*K = 0$ y no hay nada que probar. Supongamos pues $f \neq 0$

Dado $\varepsilon > 0$, por ser K uniformente continua encontramos un $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_1}$ entonces:

$$|f * K(x) - f * K(y)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)K(x-t)\, dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(t)K(y-t)\, dt \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|\, |K(x-t) - K(y-t)|\, dt \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon \ \mid f(t) \mid dt = \varepsilon$$

ya que $|(x-t)-(y-t)| = |x-y| < \delta$. Esto muestra que $f*K$ es uniformemente continua. Ya sabemos que

$$\|f * K\|_\infty \ \leq \ \|f\|_1 \, \|K\|_\infty$$

por lo que $f * K$ resulta acotada. $\square$

7.4. Convolucion con funciones suaves

Definición 7.4.1 *Para $m \in \mathbb{N}$, denotamos C^m la clase de funciones $f(x)$ con $x \in \mathbb{R}^d$ tales que todas las derivadas parciales hasta el orden m incluido existen y son continua.*

El subconjunto de funciones de clase C^m con soporte compacto se denota C_0^m

Similarmente C^∞ es el conjunto de funciones indefinidamente diferenciables y C_0^∞ el sub-conjunto de las de soporte compacto.

Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ es un **multi-índice** con los $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ podemos considerar la derivada parcial:

$$(D^\alpha f)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

siendo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_d$.

Teorema 7.4.2 *Si* $1 \leq p \leq \infty$*,* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y* $K \in C_0^m$*, entonces* $f * K \in C_0^m$ *y se tiene que :*

$$D^\alpha(f * K)(x) = (f * D^\alpha K)(x)$$

siempre que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq m$*.*

Demostración: Primero probamos que si K es continua con soporte compacto, entonces $f * K$ es continua:

$$|(f*K)(x+h)-(f*K)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)K(x+h-t)\,dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(t)K(x-t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\,[K(x+h-t) - K(x-t)]\,\,dt \right|$$

Llamamos $u = x - t \Rightarrow t = x - u$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)\,[K(u+h) - K(u)]\,\,dt \right|$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-u)|^p du \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |K(u+h) - K(u)|^q \right)^{1/q}$$

$$= \|f\|_p \|K(u+h) - K(u)\|_q$$

Afirmamos que esta última expresión tiede a cero cuando $|h| \to 0$.

En efecto, como K es continua y tiene soporte compacto, entonces es uniformemente continua en $\mathbb{R}^d$, por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $u \in \mathbb{R}^d$, si $|h| < \delta$ entonces $|K(u+h) - K(u)| < \varepsilon$. Podemos además asumir que $\delta < 1$.

En consecuencia si $]h| < \delta$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K(u+h) - K(u)|^q\,du = \int_I |K(u+h) - K(u)|^q du \;\leq \int_I \varepsilon^q\,du = \varepsilon^q m(I)$$

en donde $I = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \mathrm{Sop}(K) \leq 1\}$ (que es un compacto, y por lo tanto tiene medida finita).

Sea $K \in C_0^m (m \geq 1)$ fijada i con $1 \leq i \leq m$, y sea e_i el i-ésimo vector de la base canónica entonces:

$$\frac{(f*K)(x + h \cdot e_i) - (f*K)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \left\{ \frac{(K(x - t + h \cdot e_i) - K(x-t)}{h} \right\}\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) \left\{ \frac{\partial K}{\partial x_i}(x - t + h^*) \right\}\,dt$$

por el teorema del valor medio, para algún $h^* = \xi \cdot e_i$ dependiendo de x y t, donde ξ está entre 0 y h.

Por lo tanto, cuando $|h| \to 0$, $\frac{\partial K}{\partial x_i}(x - t + h^*)$ converge a $\frac{\partial K}{\partial x_i}(x - t)$ uniformemente en t. Como $\frac{\partial K}{\partial x_i}$ tiene soporte compacto, se deduce del teorema de la convergencia uniforme que la última integral converge a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(t) \frac{\partial K}{\partial x_i}(x - t)\, dt$$

Por lo tanto, $\frac{\partial (f*K)}{\partial x_i}(x)$ existe y es igual a $\left(f * \frac{\partial K}{\partial x_i}\right)(x)$ que es continua por lo antes demostrado.

Esto prueba el teorema si $m = 1$. La prueba para m cualquiera es inmediata por inducción (aplicando el caso $m = 1$).

Se sigue que $f * K \in C^\infty$ si $f \in L^p(1 \leq p \leq +\infty)$ y $K \in C_0^\infty$

Además $f * K$ tiene soporte compacto por la proposición 7.3.4. □

7.5. Aproximaciones de la identidad

Definición 7.5.1 *Dada una función $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ notamos*

$$K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

Por ejemplo si $K =$ función característica de la bola $B = \{x \in \mathbb{R}^d :\| x \|< 1\}$ tenemos que:

$$K_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-d} & \text{si} \quad |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad \text{si } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

o sea $K_\varepsilon = \varepsilon^{-n} \chi_{B_\varepsilon(0)}$ donde $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < \varepsilon\}$. Vemos que a medida que achicamos ε, K_ε es una función con un pico más elevado y un soporte más chico. Para cualquier K positiva ocurre lo mismo: en general K_ε tiene las siguientes propiedades básicas:

Lema 7.5.2 *Si $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\varepsilon > 0$ entonces*

i)

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} K(x) dx$$

ii) Para cada $\delta > 0$ fijo,

$$\int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\, dx \to 0 \quad \textit{cuando} \quad \varepsilon \to 0$$

Demostración: Para probar i) basta hacer el cambio de variable $y = x/\varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} K(y)\, dy$$

(es un cambio lineal de coordenadas)

Para probar $ii)$ fijemos un $\delta > 0$ y hagamos el mismo cambio de variable:

$$\int_{|x|>\delta} |K_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{|x|>\delta} \varepsilon^{-d} \left| K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \, dx =$$

$$= \int_{|y|>\delta/\varepsilon} |K(y)|\, dx$$

Pero $\delta/\varepsilon \to +\infty$ cuando $\varepsilon \to 0$ como $K \in L^1(\mathbb{R}`d)$ la última integral tiende a cero a medida que $\varepsilon \to 0$. $\square$ Notemos que

si $K \geq 0$ la primera propiedad significa que el area bajo los gráficos de K y K_ε es la misma , mientras que la segunda significa que que para ε pequeño el área bajo el gráfico de K_ε está concentrada en una región sobre un pequeño entorno del origen.

Para cualquier $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ podemos esperar que si en la fórmula

$$(f * K_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) K_\varepsilon(t) dt$$

hacemos que $\varepsilon \to 0$ van a pesar los valores de $f(x-t)$ para t pequeño. De hecho, vamos a probar que $(f * K_\varepsilon)(x) \to f(x)$ en varios sentidos (por ejemplo puntualmente) cuando $\varepsilon \to 0$ con adecuadas hipótesis sobre f y K

Una familia $\{K_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ de núcleos para la cual $f * K_\varepsilon \to f$ en algún sentido se llama una **aproximación de la identidad**.

Teorema 7.5.3 *Sea $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ donde $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\int_{\mathbb{R}`d} K(x)dx = 1$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces $\| f_\varepsilon - f \|_p \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, es decir que f_ε converge a f en L^p*

Demostración: Por la parte $i)$ del lema anterior tenemos:

$$f(x) = f(x) \int_{\mathbb{R}^d} K_\varepsilon(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, K_\varepsilon(t) dt$$

Por lo tanto

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^d} [f(x-t) - f(x)]\, K_\varepsilon(t) dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|\, |K_\varepsilon(t)|\, dt =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|\, |K_\varepsilon(t)|^{1/p} |K_\varepsilon(t)|^{1/q}\, dt$$

donde q es tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(1/q = 0$ si $p = 1)$

Aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes p y q, obtenemos que:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p\, |K_\varepsilon(t)|\, dt \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)|\, dt \right)^{1/q}$$

$$= \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)| dt \right\}^{1/q}$$

Elevamos ambos miembros a la p e integramos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_\varepsilon(x) - f(x)|^p \, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p \, |K_\varepsilon(t)| \, dt \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)| \, dt \right\}^{p/q} \, dx$$

$$= \| K \|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p \, |K_\varepsilon(t)| \, dt \right\} \, dx$$

Cambiando el orden de integración en la última integral (lo que está justificado por el teorema Fubini-Tonelli, pues el integrando es no negativo) obtenemos:

$$\| f - f_\varepsilon \|_p^p \leq \| K \|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p \, |K_\varepsilon(t)| \, dx \right\} \, dt$$

$$= \| K \|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)| \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p \, dx \right\} dt$$

Llamando $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \; |f(x-t) - f(x)|^p dx = \|f(x-t) - f(x)\|_p^p$ tenemos

$$\|f - f_\varepsilon\|_p^p \leq = \|K\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)| \phi(t) \, dt$$

Para $\delta > 0$ escribimos

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} |K_\varepsilon(t)| \, \phi(t) dt = A_{\varepsilon,\delta} + B_{\varepsilon,\delta}$$

con

$$A_{\varepsilon,\delta} = \int_{|t|<\delta} |K_\varepsilon(t)| \, \phi(t) \, dt$$

y

$$B_{\varepsilon,\delta} = \int_{|t|\geq\delta} |K_\varepsilon(t)| \, \phi(t) \, dt$$

Dado $\eta > 0$, podemos elegir $\delta > 0$ tan pequeño que $\phi(t) < \eta$ si $|t| < \delta$, ya que $\phi(t) \to 0$ cuando $|t| \to 0$ pues $f \in L^p$.

$$A_{\varepsilon,\delta} \leq \eta \int_{|t|<\delta} |K_\varepsilon(t)| \, dt \leq \eta \, \| K \|_1$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por otra parte, por la desigualdad de Minkowki ϕ es una función acotada, de hecho:

$$\phi(t)^{1/p} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \leq$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^p \, dx \right\}^{1/p} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = 2 \, \|f\|_p$$

de modo que $\|\phi\|_\infty \leq 2\|f\|_p)^p = C$.

$$B_{\varepsilon,\delta} = \int_{|t|\geq\delta} |K_\varepsilon(t)| \, \phi(t) \, dt \leq C \int_{|t|\geq\delta} |K_\varepsilon(t)| \, dt \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$. Por lo tanto, $I_\varepsilon \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ y esto prueba el teorema. □

Nota: También es posible, como en el caso del teorema 7.2.1, efectuar la prueba utilizando la desigualdad integral de Minkowski en lugar de la desigualdad de Hölder (y resulta algo má simple).

Corolario 7.5.4 *Para* $1 \leq p < \infty$, $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *es denso en* $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Demostración: Sea $f \in L^p$, $(1 \leq p < \infty$). Dado $\eta > 0$, escribamos $f = g + h$ donde g tiene soporte compacto y $\|h\|_p < \eta$

Elijamos un núcleo $K \in C_0^\infty$ tal que $\int_{\mathbb{R}^d} K(x) \, dx = 1$ y sea $g_\varepsilon = g * K_\varepsilon$, entonces $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ y $\|g - g_\varepsilon\|_p \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ por los resultados anteriores.

Elijamos ε tal que $\|g - g_\varepsilon\|_p < \eta$ entonces

$$\|f - g_\varepsilon\|_p \leq \|h\|_p + \|g - g_\varepsilon\|_p < 2\eta$$

Esto prueba el corolario. □

El siguiente resultado es un sustituto del teorema anterior para $p = \infty$:

Teorema 7.5.5 *Sea* $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ *donde* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $K \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $\int_{\mathbb{R}^d} K(x) dx = 1$, *entonces* $f_\varepsilon \to f$ *en cada punto de continuidad de* f *cuando* $\varepsilon \to 0$

Demostración:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) K_\varepsilon(t) \, dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) K_\varepsilon(t) \, dt \right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)| \, |K_\varepsilon(t) \, | \, dt$$

Si f es continua en x, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon$. Y obtenemos:

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{|t|\geq\delta} |f(x-t) - f(x)| \, |K_\varepsilon(t)| \, dt$$

$$+\varepsilon \int_{|t|<\delta} |K_\varepsilon(t)| \, dt$$

$$\leq 2\|f\|_\infty \int_{|t|\geq\delta} |K_\varepsilon(t)| \, dt + \varepsilon \|K\|_1$$

Como $\int_{|t|\geq\delta} |K_\varepsilon(t)| \, dt \to 0$ cuando *varepsilon* $\to 0$ para un δ fijo, se sigue que $|f_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$ □

Teorema 7.5.6 *Sea $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ donde $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $K \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\int_{\mathbb{R}^d} K(x)dx = 1$ y $K(x) = o(|x|^{-d})$ entonces $f_\varepsilon \to f$ puntualmente cuando $\varepsilon \to 0$, en cada punto de continuidad de f.*

7.6. Ejemplos (en $d = 1$)

1. Núcleo de Poisson:
$$K(x) = P(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{1+x^2}$$
Entonces $P \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}} P(x)dx = 1$, P es positivo y $P(x) = o(|x|^{-1})$ cuando $|x| \to \infty$, de hecho $P(x) = O(|x|^{-2})$.
$$P_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\pi}; \frac{1}{1+(x/\varepsilon)^2} = \frac{1}{\pi}\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$
P_ε se llama núcleo de Poisson, y la convolución
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + (x-t)^2} dt$$
integral de Poisson de f. Poniendo $\varepsilon = y$, $f(x,y) = f_y(x)$ obtenemos una función definida en el semiplano superior
$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$
$$f(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, dt$$
Observacióm: Como $\frac{y}{x^2+y^2}$ es armónica $\Rightarrow f$ resulta armónica en H.

Además se tiene que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f(x,y) \to f(y)$ cuando $y \to 0$ en cada punto de continuidad de f, luego para f continua e integrable resuelve el problema de Dirichlet:
$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0 & \text{en } H \\ u(x,0) & = & f(x) & \text{en } \partial H \end{array} \right.$$

2. Núcleo de Frejér: Para $x \in \mathbb{R}$ pongamos:
$$K(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right\}^2$$
Nuevamente $K \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, K es positivo y $\int_{\mathbb{R}} K(x)\, dx = 1$.
$$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{\operatorname{sen}\,(x/\varepsilon)}{x/\varepsilon} \right\}^2$$
Poniendo $\omega = 1/\varepsilon$ tenemos el núcleo de Frejér:

$$F(x,w) = \frac{1}{\pi}\omega \left\{ \frac{\text{sen }(x\omega)}{\omega x} \right\}^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}^2 \ (x\omega}{\omega x^2}$$

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ obtenemos que:

$$\lim_{w \to 0} \int_{\mathbb{R}} f(x-t) \ \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}^2 \ (x\omega)}{\omega x^2} \ dx = f(x)$$

en cada punto de continuidad de f.

3. Núcleo de Gauss-Weirstrass: Tomamos la función

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

(distribución normal de probabilidad)

$$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-x^2/(2\varepsilon^2)}$$

(Para la teoría de probabilidades es la distribución normal de media 0 y variancia ε^2). Poniendo $\varepsilon = \sqrt{t}$ se obtiene

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/(2t)}$$

Se verifica que W satisface la ecuación del calor

$$2\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-y^2/(2t)} \ dy = f(x)$$

en cada punto de continuidad de f. Por consiguiente

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-y^2/(2t)} \ dy$$

resuelve el problema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\frac{\partial W}{\partial t} & = & \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \text{ para } t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x) \end{array} \right.$$

cuando f es continua e integrable.

7.7. Convergencia en casi todo punto

Si fortalecemos las hipótesis sobre K podemos obtener convergencia en casi todo punto. Por ejemplo tenemos el siguiente resultado: (cuyas hipótesis se satisfacen en todos los ejemplos anteriores)

Teorema 7.7.1 *Supongamos que el núcleo K está acotado por una función radial*

$$|K(x)| \leq K_0(|x|)$$

donde $K_0 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que la integral

$$\|K_0(|x|)\|_1 = \int_0^\infty K_0(r) r^{n-1}\, dr \tag{7.1}$$

exista como una integral de Riemann, entonces

$$|f * K_\varepsilon(x)| \leq C\, Mf(x) \tag{7.2}$$

donde Mf denota la función maximal de Hardy-Littlewood.

Demostración: Dado un $r > 0$, partimos la integral que queremos estimar en coronas:

$$\begin{aligned} |f * K_\varepsilon(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^k r \leq |x-y| \leq 2^{k+1} r} |f(y)| \frac{1}{\varepsilon^n} K_0\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon} \right)\, dy \end{aligned}$$

pero entonces como K_0 es decreciente

$$\begin{aligned} |f * K_\varepsilon(x)| &\leq (2^{k+1})^n \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_0(2^k r)(2^{k+1})^d \frac{1}{(2^{k+1}\varepsilon r)^d} \int_{B(x, 2^{k+1} r\varepsilon)} |f(y)|\, dy \\ &\leq \omega_n\, C(r)\, Mf(x) \end{aligned}$$

donde ω_d denota la medida de la bola unitaria en $\mathbb{R}^d$, siempre que la serie

$$C(r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} K_0(2^k r)(2^{k+1} r)^d$$

converja. Pero esta suma $C(r)$ es 2^d veces la suma de Riemann para la integral (7.1) correspondiente a la particiòn dada por los puntos

$$x_k = 2^k r$$

ya que para esta partición $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = 2^k r$. Haciendo entonces que $r \to 0$, se deduce 7.2, donce la contante C se puede tomar como

$$C = 2^n \omega_d \int_{\mathbb{R}^n} K_0(|x|)\, dx$$

□

Teorema 7.7.2 *Supongamos que el nùcleo K es acotado y satisface las hipótesis del teorema anterior. Entonces si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, $f * K_\varepsilon(x) \to f(x)$ en casi todo punto.*

Demostración: Utilizamos un argumento similar al que usamos para probar el teorema de diferenciación de Lebesgue (teorema 5.3.4). Introducimos el operador sublineal:

$$L(f)(x) = \limsup_{\varepsilon \to 0} |f * K_\varepsilon(x) - f(x)|$$

Por el teorema 7.5.5, el resultado es cierto para f continua con soporte compacto, luego $L(f) = 0$ en este caso.

Por otro lado

$$|L(f)| \leq M(f) + |f|$$

por el teorema anterior. Se deduce que M satisface la estimación de tipo débil (p, p):

$$m(x \in \mathbb{R}^n : Lf(x) > \varepsilon) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_p^p$$

Como las funciones continuas de soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ si $1 \leq p < \infty$, repitiendo el argumento que usamos en el teorema de diferenciación, se sigue que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $L(f) = 0$ en casi todo punto. Esto implica que $f * K_\varepsilon(x) \to f(x)$ para casi todo x.

□

Otro resultado similar es:

Teorema 7.7.3 *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, K es acotado $K(x) = O(| x |^{-d-\lambda}$) cuando $|x| \to \infty$, para algún $\lambda > 0$ y que $\int_{R^d} K(x)\, dx = 1$, entonces $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon \to f$ en cada punto de Lebesgue de f (y en particular en casi todo punto)*

La demostración puede verse en [WZ77] (teorema 9.13)

Apéndice A

Notaciones

$\overline{\mathbb{R}}$	Recta real extendida ($= \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$)
$\mathbb{R}^d$	Espacio euclídeo d-dimensional
$\mathcal{E}$	La clase de los conjuntos elementales
$\mathcal{F}$	La clase de los conjuntos que tienen medida exterior finita
$\mathcal{M}$	La clase de los conjuntos medibles Lebesgue
$\mathcal{M}_f$	La clase de los conjuntos finitamentes medibles
$m(A)$, $\|A\|$	Medida de Lebesgue de A
$m_e(A)$, $\|A\|_e$	Medida exterior de Lebesgue de A
$D(E)$	conjunto de diferencias de E (definición 1.14.1)
χ_A	función característica del conjunto A
$\int_\Omega f\, d\mu$	integral de la función f sobre el espacio Ω con respecto a la medida μ
$Mf(x)$	función maximal de Hardy-Littlewood (sección 5.2)

Apéndice B

El Conjunto de Cantor y la función de Cantor Lebesgue

En este apéndice, recordamos la contrucción del conjunto de Cantor y la función de Cantor-Lebesgue[1]. Estos objetos (y sus variantes), se utilizan frecuentemente a lo largo de la materia para construir contraejemplos.

B.1. El Conjunto de Cantor

Consideramos las transformaciones afines $T_1, T_2 : [0,1] \to [0,1]$

$$T_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad T_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

Definimos una sucesión de conjuntos $F_n \subset [0,1]$ por inducción

$$F_0 = [0,1], \quad F_n = T_1(F_{n-1}) \cup T_2(F_{n-1}) \ (n \geq 1)$$

y definimos el *conjunto ternario de Cantor* como

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Ejercicio:

(a) Describir geométricamente cómo es F_n.

(b) Probar que C es un compacto, y $C = T_1(C) \cup T_2(C)$ (Esta última propiedad suele expresarse diciendo que C es *auto-similar*).

(c) Probar que para cada $\varepsilon > 0$ es posible cubrir a C con finitos intervalos tales que sus longitudes suman menos que ε.

[1] Lo que sigue son ejercicios de la práctica 0 de la materia. Se incluyen aquí para hacer este apunte autocontenido

(d) Probar que un número real $x \in [0, 1]$ pertenece a C si y sólo si admite un desarrollo en base 3 de la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{3^n} \text{ donde } d_n = 0 \text{ o } d_n = 2 \text{ para cada } n$$

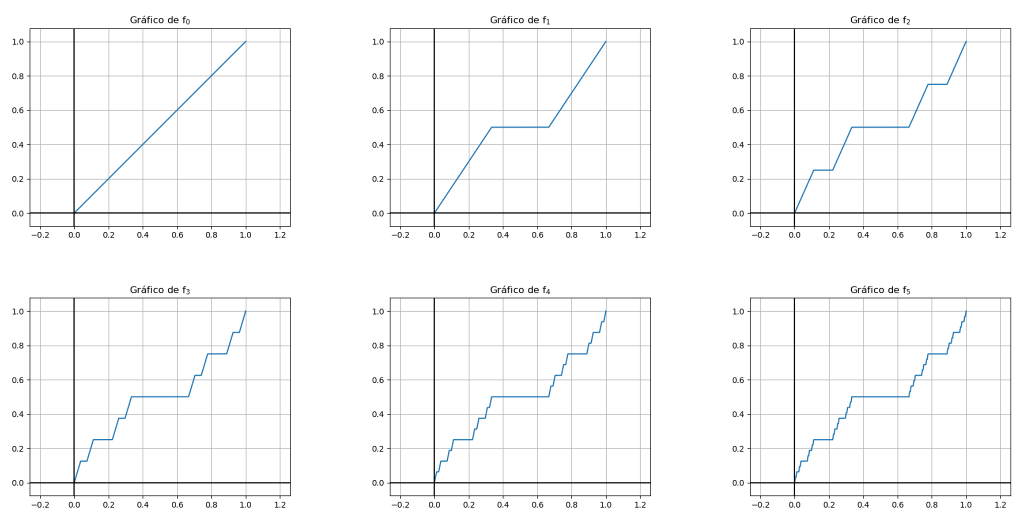
(e) Probar que C tiene cardinal c (el cadinal de $\mathbb{R}$).

B.2. La función de Cantor-Lebesgue

Similarmente definimos inductivamente una sucesión de funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f_0(x) = x \text{ para todo } x \in [0, 1]$$

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x) & \text{si } x \in [0, 1/3) \\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [1/3, 2/3] \\ \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2) + \frac{1}{2} & \text{si } x \in (2/3, 1] \end{cases} \quad \text{para todo } n \geq 1$$



Ejercicio: Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) $f_n(0) = 0, \quad f_n(1) = 1$ y f_n es continua y monótona creciente para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) f_n converge uniformemente en $[0,1]$ hacia una función continua $f : [0,1] \to [0,1]$ que llamamos la *función de Cantor-Lebesgue*.

(d) f es monótona creciente, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(e) f es constante en cada componente conexa del complemento del ternario de Cantor (¿Cómo es geométricamente este conjunto?)

La propiedad de auto-similaridad que poseen el conjunto de Cantor y la función de Cantor-Lebesgue es típica de muchos objetos estudiados en la geometría fractal. Ver [Bar14] para construcciones más generales y otros ejemplos.

Apéndice C

Otra prueba del teorema de Radon-Nikodym

En este apéndice expondremos otra demostración del teorema de Radon-Nikodym (teorema 6.3.2). Dicha demostración se basa en el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales sobre un espacio de Hilbert. Se debe a John Von Neuman[VN40] (lemma 3.2.3, pag. 127). Seguimos esencialmente la exposición de Rudin [Rud87].

Esta demostración fue la que di en las cursadas 2007 y en 2009 (y fue la que yo vi cuando cursé la materia con N. Fava). Sin embargo, en la cursada de 2017 opté por dar una prueba diferente, que creo que es más transparente, y más relacionada con los temas de análisis real. En cambio, *espacios de Hilbert* es un tema más propio de análisis funcional. Por dicha razón, expondremos también los pre-requisitos necesarios sobre este tema. Para más información sobre el mismo, pueden consultar [RSN90].

C.1. El espacio L^2 - Espacios de Hilbert

Entre los espacios L^p se destaca de modo especial el L^2 ya que su norma proviene de un producto escalar:

Definición C.1.1 *Si $f, g \in L^2(E, \mu)$ entonces definimos el producto escalar o producto interno de f por g mediante:*

$$\langle f, g \rangle = \int_E f \cdot \overline{g} \, d\mu$$

donde $\overline{g}$ significa la función conjugada de g (Para cada x, $\overline{g}(x) = \overline{g(x)}$, donde la barra indica el complejo conjugado)

Si en la desigualdad de Hölder tomamos $p = 2 \Rightarrow p' = 2$ y resulta:

$$\int_E |f \cdot \overline{g}| \, d\mu \leq \left(\int_E |\ f\ | \, d\mu \right)^{1/2} \left(\int_E |g(x)| d\mu \right)^{1/2} = \| \ f \ \|_2 \cdot \| \ g \ \|_2$$

luego si f, g están en L^2 entonces $f \cdot \overline{g}$ es integrable ($\langle f, g \rangle$ está bien definido), y

$$|\langle f, g \rangle| \leq \| \ f \ \|_2 \ . \ \| \ g \ \|_2$$

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz).

Propiedades del producto interno

H1) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle g, h \rangle$ $\langle \lambda \cdot f, h \rangle = \lambda \cdot \langle f, g \rangle$ (Linealidad en el primer argumento))

H2) $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

H3) $\langle f, f \rangle \geq 0$ y $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$ (Recordamos $f = 0$ significa $f(x) = 0$ en casi todo punto)

Un espacio vectorial H sobre los números complejos en el que está definido un producto interno (o escalar) que satisface las propiedades $H1)H2)$ y $H3)$ se llama un espacio con producto interno (o escalar) o espacio pre-Hilbertiano.

En cualquier espacio con producto interno valen:

1. $$\langle f, 0 \rangle = \langle 0, f \rangle = 0 \text{ para todo } f$$

2. $$\langle f, \lambda . g \rangle = \overline{\lambda} \cdot \langle f, g \rangle$$

3. $$|\langle f, g \rangle|^2 = \langle f, g \rangle \cdot \langle g, f \rangle$$

En cualquier espacio con producto interno H se define:

$$\| \ f \ \| = \sqrt{< f, f >}$$

Se verfica por 3) que $\| \ f \ \| \geq 0$ para todo $f \in Hy$ que $\| \ f \ \| = 0$ si y sólo si $f = 0$.Esto hace de Hun espacio normado, y en particular un espacio métrico (definiendo la distancia por $d(f, g) = \| \ f - g \ \|$)

Si el espacio H es un espacio métrico completo, diremos que es un **espacio de Hilbert**. Por ejemplo, L^2 es un espacio de Hilbert. En lugar de estudiar el espacio L^2, vamos a estudiar un espacio de Hilbert H cualquiera.

Proposición C.1.2 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *En cualquier espacio con producto interno se tiene:*

$$| \langle f, g \rangle | \leq \| f \| \cdot \| g \|$$

(Para L^2 es un caso particular de la desigualdad de Hölder)

Demostración: Si $g = 0$ entonces $\langle f, g \rangle = 0$, y la desigualdad es trivial. Supongamos pues $g \neq 0$

$$0 \leq \| f + \lambda \cdot g \|^2 = \langle f + \lambda \cdot g, f + \lambda . g \rangle = \langle f, f + \lambda \cdot g \rangle + \lambda \langle g, f + \lambda . g \rangle =$$

$$= \langle f, f \rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle f, g \rangle + \lambda \cdot \langle g, f \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle g, g \rangle$$

Pongamos;

$$\lambda = \frac{-\langle f, g \rangle}{\| g \|^2}$$

de modo que:

$$\overline{\lambda} = \frac{-\langle g, f \rangle}{\| g \|^2}$$

Resulta:

$$0 \leq \| f \|^2 - \frac{\langle f, g \rangle \cdot \langle g, f \rangle}{\| g \|^2}$$

y como $\langle f, g \rangle \cdot \langle g, f \rangle = | \langle f, g \rangle |^2$, resulta multiplicando por $\| g \|^2$:

$$0 \leq \| f \|^2 \| g \|^2 - | \langle f, g \rangle |^2$$

Por lo tanto

$$| \langle f, g \rangle |^2 \leq \| f \|^2 . \| g \|^2$$

y tomando raíz cuadrada obtenemos lo que queremos. □

Proposición C.1.3 *En cualquier espacio con producto interno valen:*

i)
$$\| \lambda \cdot f \| = | \lambda | \cdot \| f \|$$

ii)
$$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$$

iii)
$$\| f \| \geq 0 \text{ y } \| f \| = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

Demostración:

$$\| \lambda \cdot f \|^2 = \langle \lambda \cdot f, \lambda \cdot f \rangle = \lambda \cdot \overline{\lambda} \langle f, f \rangle = | \lambda |^2 \cdot \| f \|^2$$

Tomando raíz cuadrada obtenemos $i)$

$$\| f + g \|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle$$

Notemos que

$$\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle = \langle f, g \rangle + \overline{\langle f, g \rangle} = 2 \operatorname{Re}\langle f, g \rangle$$

(donde Re significa: parte real)

$$\| f + g \|^2 = \| f \|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \| g \|^2$$

Utilizamos ahora la desigualdad $Re(z) \leq | z |$ para obtener:

$$\| f + g \|^2 \leq \| f \|^2 + 2 \cdot | \langle f, g \rangle | + \| g \|^2$$

Y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$0 \leq \| f \|^2 + 2 \cdot \| f \| \cdot \| g \| + \| g \|^2 = (\| f \| + \| g \|)^2$$

Tomando raíz cuadrada obtenemos $ii)$
$iii)$ es simplemente otra forma de escribir la condición 3) de la definición. □

Esta proposición prueba que un espacio con producto interno es un espacio normado.

Proposición C.1.4 (Teorema de continuidad) *Si $f \to f_n$, $g_n \to g$ y $\lambda_n \to \lambda$ entonces:*

i) $f_n + g_n \to f + g$

ii) $\lambda_n \cdot f_n \to \lambda \cdot f$

iii) $\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle$

iv) $\| f_n \| \to \| f \|$

(Esto es: en un espacio con producto interno la suma,el producto por escalares y el producto interno son continuos)

Demostración: i):

$$\| (f_n + g_n) - (f + g) \| \leq \| f_n - f \| + \| g_n - g \|$$

Cuando $n \to \infty$ tenemos que $\| f_n - f \| \to 0$ y $\| g_n - g \| \to 0$ por hipótesis, luego:

$$\| (f_n + g_n) - (f + g) \| \to 0$$

o sea:

$$f_n + g_n \to f + g$$

ii):

$$\| \lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f \| = \| \lambda_n \cdot (f_n - f) + (\lambda_n - \lambda) \cdot f \|$$

$$\| \lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f \| = \| (\lambda_n - \lambda) \cdot (f_n - f) + \lambda \cdot (f_n - f) + (\lambda_n - \lambda).f \|$$

Por lo tanto,

$$\| \lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f \| \leq | \lambda_n - \lambda | \cdot \| f_n - f \| + | \lambda | \cdot \| f_n - f \| + | \lambda_n - \lambda | \cdot \| f \|$$

Cuando $n \to \infty$, $\| f_n - f \| \to 0$ y $| \lambda_n - \lambda | \to 0$ por hipótesis, luego

$$\| \lambda_n \cdot f_n - \lambda \cdot f \| \to 0$$

Es decir: $\lambda_n \cdot f_n \to \lambda \cdot f$.

iii):

$$| \langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle | = | \langle f_n, g_n - g \rangle + \langle f_n - f, g \rangle |$$

$$| \langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle | = | \langle f_n - f, g_n - g \rangle + \langle f, g_n - g \rangle + \langle f_n - f, g \rangle |$$

$$| \langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle | \leq | \langle f_n - f, g_n - g \rangle | + | \langle f, g_n - g \rangle | + | \langle f_n - f, g \rangle |$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$| \langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle | \leq \| f_n - f \| \cdot \| g_n - g \| + \| f \| \cdot \| g_n - g \| + \| f_n - f \| \cdot \| g \|$$

cuando $n \to \infty$ $\| f_n - f \| \to 0$ y $\| g_n - g \| \to 0$, luego $| \langle f_n, g_n \rangle - \langle f, g \rangle | \to 0$
Esto significa que $\langle f_n, g_n \rangle \to \langle f, g \rangle$.

iv): Aaplicamos $iii)$ con $g_n = f_n$ entonces

$$\| f_n \|^2 \to \| f \|^2$$

luego

$$\| f_n \| \to \| f \|$$

□

C.2. Teorema de la Perpendicular

Definición C.2.1 *Sea H un espacio con producto interno. Diremos que dos vectores $f, g \in H$ son* **ortogonales** *y escribiremos $f \perp g$ si $\langle f, g \rangle = 0$. Sea $S \subset H$, definimos $S^\perp$ por:*

$$S^\perp = \{v \in H : \langle v, s \rangle = 0 \ \ \textit{para todo} \ \ s \in S\}$$

Observación C.2.2 *$S^\perp$ es un subespacio vectorial cerrado de H.*

Demostración: $0 \in S^\perp$ pues $\langle 0, s \rangle = 0$ para todo $s \in S$.
Si $f, g \in S^\perp$ entonces para cualquier $s \in S$ tenemos

$$\langle f + g, s \rangle = \langle f, s \rangle + \langle g, s \rangle = 0$$

luego $f + g \in S^{\perp}$

Si $f \in S^{\perp}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces para todo $s \in S$:

$$\langle \lambda \cdot f, s \rangle = \lambda \cdot \langle f, s \rangle = 0$$

luego $\lambda \cdot f \in S^{\perp}$

Finalmente, si f_n es una sucesión de vectores de $S^{\perp}$ y $f_n \to f$ tenemos para $s \in S$, $\langle f_n, s \rangle = 0$ y por la proposición C.1.4 $\langle f, s \rangle = 0$ luego $f \in S^{\perp}$. □

Proposición C.2.3 (Identidad del paralelogramo) *En un espacio con producto interno se tiene:*

$$\| f + g \|^2 + \| f - g \|^2 = 2. \| f \|^2 + 2. \| g \|^2 \tag{C.1}$$

geométricamente: La suma de los cuadrados de las diagonales de un palalelogramo es la suma de los cuadrados de sus lados.

Demostración: Es inmediata:

$$\| f + g \|^2 = \langle f + g, f + g \rangle$$

$$\| f + g \|^2 = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle$$

$$\| f + g \|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \tag{C.2}$$

Si cambiamos g por $-g$, se obtiene que

$$\| f - g \|^2 = \|f\|^2 - 2 \operatorname{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2$$

Y sumando estas relaciones se obtiene la identidad del enunciado. □

Notas: 1) se puede probar que si en un espacio normado vale la identidad del paralelogramo la norma proviene de un producto escalar.
2) Se puede usar para probar que en los $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \neq 2$ la norma no proviene de un producto escalar (Tomar por ejemplo f= función característica del intervalor $[0, 1/2]$ y g la del intervalo [1/2,1])

Recordamos que un subconjunto C de un espacio vectorial es **convexo** si dados $x, y \in C$, el segmento que los une está contenido en C, es decir si $(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$, para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Teorema C.2.4 *Sea $C \subset H$ un conjunto convexo cerrado, y $h \in H$. Entonces existe un vector $f_0 \in C$, que realiza la distancia de h a C, es decir tal que*

$$\|f_0 - h| = d(h, C) = \inf\{\| h - f \| : f \in C\}$$

Demostración: Sea $d = d(h, C)$. En virtud de la definición de ínfimo, existe una sucesión (f_n) de puntos de F tales que $\| h - f_n \| \to d$. (Una tal sucesión se llama una **sucesión minimizante**). Escribiremos

$$\|h - f_n| = d + \delta_n \text{ donde } \delta_n \to 0$$

Vamos a probar que (f_n) es una sucesión de Cauchy: Por la identidad del paralelogramo (C.1) con $f = \frac{f_n - h}{2}$ y $g = \frac{f_m - h}{2}$ tenemos que:

$$\left\| \frac{f_n + f_m}{2} - h \right\|^2 + \left\| \frac{f_n - f_m}{2} \right\|^2 = 2 \left\| \frac{f_n - h}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{f_m - h}{2} \right\|^2$$

Pero como C es convexo, $\frac{f_n + f_m}{2} \in C$, en consecuencia:

$$\left\| \frac{f_n + f_m}{2} - h \right\|^2 \geq d$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{4} \|f_n - f_m\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f_n - h\|^2 + \frac{1}{2} \|f_m - h\|^2 - d^2 = \frac{1}{2}(d + \delta_n)^2 + \frac{1}{2}(d + \delta_m)^2 - d^2$$

Cuando $n, m \to \infty$, se deduce que $\|f_n - f_m\| \to 0$, es decir que (f_n) es de Cauchy. Entonces, como H es completo, (f_n) convergerá a algún vector $f_0 \in H$. Y como C es cerrado, y $f_n \in C$ para todo n, $f_0 \in C$. Y por la continuidad de la norma, $\|f_n - h\| = d$.

□

Teorema C.2.5 (de la perpendicular) *Sea H un espacio de Hilbert. Sea F un subespacio vectorial cerrado de H entonces $H = F \oplus F^\perp$*

(Geometricamente: por un punto exterior al subespacio F pasa una sóla perpendicular a F)

Demostración: Sea $h \in H$. Notamos que un subespacio es en particular un conjunto convexo. Luego por el teorema anterior, existe un vector $f_0 \in F$ que realiza la distancia $d = d(h, F)$.

Vamos a probar que $h - f \in F^\perp$. Para ello, tomemos cualquier $g \in F$, y consideremos la función de la variable real t,

$$P(t) = \|h - (f_0 + tg)\|^2$$

Desarrollándola de acuerdo a (C.2), vemos que $P(t)$ es un polinomio cuadrático:

$$P(t) = \|h - f_0\|^2 + 2t \operatorname{Re}\langle h - f_0, g\rangle + t^2 \|g\|^2$$

Observamos que $f_0 + tg \in F$, por ser F un subespacio. Luego, $P(t) \geq d = P(0)$. Es decir $P(t)$ tiene en $t = 0$ un mínimo. Luego $P'(0) = 0$, es decir:

$$\operatorname{Re}\langle h - f_0, g\rangle = 0 \ \forall \, g \in F^\perp \tag{C.3}$$

En el caso de un espacio de Hilbert real, esto prueba que $h - f \in F^\perp$. En el caso complejo, notamos que si $g \in F$, $ig \in F$ por ser F un subespacio luego:

$$\operatorname{Re}\langle h - f_0, ig\rangle = 0 \ \forall \, g \in F^\perp$$

o sea:

$$\mathrm{Re}(-i)\langle h - f_0, g\rangle = 0 \;\forall\, g \in F^{\perp}$$

En consecuencia:

$$\mathrm{Im}\langle h - f_0, g\rangle = 0 \;\forall\, g \in F^{\perp}$$

y teniendo en cuenta (C.3),

$$\langle h - f_0, g\rangle = 0 \;\forall\, g \in F^{\perp}$$

Es decir que $h - f_0 \in F^{\perp}$.

En consecuencia, hemos podido escribir a cualquier vector $h \in H$ en la forma $h = f_0 + (h - f_0)$, donde $f_0 \in F$ y $h - f_0 \in F^{\perp}$. Es decir que: $H = F + F^{\perp}$.

Si $f \in F \cap F^{\perp}$, entonces $\langle f, f\rangle = 0$, luego $f = 0$. Es decir $F \cap F^{\perp} = \{0\}$.

Por álgebra lineal, sabemos que entonces $H = F \oplus F^{\perp}$ □

C.3. Funcionales Lineales Continuas en un espacio de Hilbert

Definición C.3.1 *Una funcional lineal en el espacio de Hilbert H una función $\gamma : H \to \mathbb{C}$ que satisface*

$$\gamma(\lambda_1 \cdot h_1 + \lambda \cdot h_2) = \lambda_1 \cdot \gamma(h_1) + \lambda_2 \cdot \gamma(h_2)$$

Recordamos que si γ es continua, entonces existe una constante C tal que

$$|\gamma(h)| \leq C \, \| h \|$$

La mínima constante C posible se llama la norma de γ y se nota $\| \gamma \|$.

Ejemplo: Sea $f \in H$ fijo. Entonces definamos

$$\gamma_f(h) = \langle h, f\rangle \text{ para todo } h \in H.$$

Entonces γ_f es una funcional lineal continua, ya que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que:

$$|\gamma_f(h)| \leq \|f\| \cdot \|h\|$$

Además se tiene $\|\gamma_f\| \leq \|f\|$. Pero eligiendo $h = \frac{f}{\|f\|}$, vemos que en realidad:

$$\|\gamma_f\| = \|f\|$$

Teorema C.3.2 (Teorema de representacion de Riesz) *Si $\gamma : H \to \mathbb{C}$ es una funcional lineal continuaen un espacio de Hilbert H entonces existe un único vector $f \in H$ tal que para todo $h \in H \gamma(h) = \langle h, f\rangle$. Es decir: $\gamma = \gamma_f$, para algún $f \in H$.*

Demostración: Probaremos primero la existencia de f. Sea

$$N = Nu(\gamma) = \{h \in H : \gamma(h) = 0\} = \gamma^{-1}(\{0\})$$

Como γ eslineal y continua, N es un subespacio vectorial cerrado. Entonces,

$$H = N \oplus N^{\perp}.$$

Si $N^{\perp} = \{0\}$, entonces $N = H \Rightarrow$ Tomamos $f = 0$, y listo (γ es identicamente nula).

Si $N^{\perp} \neq \{0\}$, sea $g \in N^{\perp}$ con $\| g \| = 1$. (Si $j \in N$ y $j \neq 0$ tomamos $g = j / \| j \|$)

Sea $h \in H$ cualquiera, veamos que $\gamma(h) \cdot g - \gamma(g) \cdot h \in N$:

$$\gamma\left(\gamma(h) \cdot g - \gamma(g) \cdot h\right) = \gamma(h) \cdot \gamma(g) - \gamma(g) \cdot \gamma(h) = 0$$

Como $g \in N^{\perp}$, tendremos:

$$\langle \gamma(h) \cdot g - \gamma(g) \cdot h, g \rangle = 0$$

$$\langle \gamma(h) \cdot g, g \rangle - \langle \gamma(g).h, g \rangle = 0$$

O sea:

$$\gamma(h) \cdot \langle g, g \rangle - \langle \gamma(g) \cdot h, g \rangle = 0$$

Como $\langle g, g \rangle = \| g \|^2 = 1$ se tiene

$$\gamma(h) = \langle \gamma(g) \cdot h, g \rangle$$

Podemos escribirlo como

$$\gamma(h) = \langle h, \overline{\gamma(g)} \cdot g \rangle$$

Llamemos $f = \overline{\gamma(g)} \cdot g$ entonces f es el vector buscado.
Veamos que f es único. Si para todo $h \in H$ fuera:

$$\langle h, f_1 \rangle = \langle h, f_2 \rangle$$

sería:

$$\langle h, f_1 - f_2 \rangle = 0$$

En particular:

$$\langle f_1 - f_2, f_1 - f_2 \rangle = \| f_1 - f_2 \|^2 = 0$$

Por lo tanto, $f_1 - f_2 = 0 \Rightarrow f_1 = f_2$. Esto termina la demostración. $\square$

C.4. Otra prueba del Teorema de Lebesgue - Radon - Nikodym

En esta sección expondremos la otra demostración anunciada del teorema de Radon-Nikodym (teorema 6.3.2).

Recordamos que basta efectuar la demostración en el caso especial en que tanto λ como μ son medidas no negativas y finitas. Por lo tanto, supondremos que estamos en ese caso.

Definamos una nueva medida ρ poniendo

$$\rho(E) = \lambda(E) + \mu(E) \quad (E \in \mathcal{M})$$

Si $f \geq 0$ entonces:

$$\int_E f \, d\rho = \int_E f \, d\lambda + \int_E f \, d\mu \tag{C.4}$$

(Lo probamos primero para funciones simples y usamos el teorema de la convergencia monótona). Tenemos en particular

$$\int_\Omega |f| \, d\rho = \int_\Omega |f| \, d\lambda + \int_\Omega |f| \, d\mu$$

En consecuencia:

$$\int_\Omega |f| \, d\rho \geq \int_X |f| \, d\lambda$$

por lo tanto $L^1(\rho) \subset L^1(\lambda)$, y

$$\int_\Omega |f| \, d\rho \geq \int_X |f| \, d\mu$$

luego $L^1(\rho) \subset L^1(\mu)$. de modo que

$$L^1(\rho) = L^1(\mu) \cap L^1(\lambda)$$

y (C.4) vale si $f \in L^1(\rho)$.

Observación: Como $\rho(\Omega) < +\infty \Rightarrow L^2(\rho) \subset L^1(\rho)$.

Definamos una funcional lineal $\gamma : L^2(\rho) \to \mathbb{C}$ poniendo

$$\gamma(f) = \int_\Omega f \, d\lambda$$

Si $f \in L^2(\rho) \Rightarrow f \in L^1(\rho) \Rightarrow f \in L^1(\lambda)$ es una funcional lineal y continua

$$|\gamma(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d\lambda \leq \int_X |f| \, d\rho = \int_\Omega |f| \cdot 1 \, d\rho \leq \rho(\Omega)^{1/2} \ \| f \|_{2,\rho}$$

(Por la desigualdad de Hölder con $p = p' = 1/2$) donde

$$\| f \|_{2,\rho} = \left(\int_\Omega |f|^2 \, d\rho \right)^{1/2}$$

Como $L^2(\rho)$ es un espacio de Hilbert $\gamma(f) = \langle f, \overline{g} \rangle$ donde $g \in L^2(\rho)$ es fija para toda $f \in L^2(\rho)$ por el teorema de representación de Riesz. Esto significa que:

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \int_\Omega fg \, d\rho \; \forall \; f \in L^2(\rho) \tag{C.5}$$

Suponiendo que $\rho(E) > 0$, elegimos $f = \chi_E$. Como $\rho(\Omega) < +\infty \Rightarrow f \in L^2(\rho)$

$$\lambda(E) = \int_E g \, d\rho \Rightarrow 0 \leq \frac{\lambda(E)}{\rho(E)} = \frac{1}{\rho(E)} \int_E g \, d\rho \leq 1$$

($\lambda(E)/\rho(E)$ es real y no negativo pues λ, μ lo son, $\mu(E)/\rho(E) \leq 1$ pues $\mu(E) \leq \rho(E)$)

Aplicando el lema 6.4.1[1] a $F = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ (que es un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$) tenemos que $g(x) \in F$ para casi todo x (respecto de ρ). Como cambiar una función en un conjunto de medida nula no cambia su integral podemos suponer $g(x) \in [0,1]$ para todo $x \in \Omega$.

Como $\rho = \lambda + \mu$, (C.5) significa que:

$$\int_\Omega f \, d\lambda = \int_\Omega f \cdot g \, d\lambda + \int_\Omega f.g \, d\mu$$

En consecuencia,

$$\int_\Omega f \cdot (1 - g) \, d\lambda = \int_\Omega f \cdot g \, d\mu \; \forall \; f \in L^2(\rho) \tag{C.6}$$

Resulta pues natural, partir Ω en los conjuntos:

$$A = \{x \in \Omega : 0 \leq g(x) < 1\}, \quad S = \{x \in \Omega : g(x) = 1\}$$

pues en S el factor $1 - g$ de la fórmula precedente se anula. Consideramos entonces las medidas

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap A), \quad \lambda_s(E) = \lambda(E \cap S)$$

de modo que tenemos la descomposición

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s$$

Es claro que $\lambda_s \subset S$. Vamos a probar $\mu(S) = 0$ de modo que $\lambda_s \perp \mu$. Para verlo, en (C.6) elegimos $f = \chi_S$, entonces obtenemos

$$0 = \int_\Omega \chi_S \cdot (1 - g) \, d\lambda = \int_\Omega \chi_S \cdot g \, d\mu = \mu(S) \text{ pues en } S \; g = 1 \text{ y } 1 - g = 0$$

Por otra parte si en (C.6), elegimos $f = (1 + g + g^2 + \ldots + g^n) \cdot \chi_E$ (que es una función acotada, y por lo tanto pertenece a $L^2(\rho)$, obtenemos:

$$\int_E 1 - g^{n+1} d\lambda = \int_E g \cdot (1 + g + g^2 + \ldots + g^n) \, d\mu$$

[1]Notemos que este lema no depende del teorema de Radon-Nikodym.

En S el integrando de la primera integral vale 0

$$\int_{E\cap A} 1 - g^{n+1}\, d\lambda = \int_E g \cdot (1 + g + g^2 + \ldots + g^n)\, d\mu$$

Hagamos que que $n \to \infty$, $1 - g^{n+1}$ tiende a 1 en forma creciente (en A, $0 \leq g < 1$), y $g \cdot (1 + g + g^2 + \ldots + g^n)$ tiende en forma creciente hacia

$$h = 1 + g + g^2 + \ldots + g^n + \ldots$$

(Serie geométrica convergente). Del teorema de convergencia monótona resulta entonces que:

$$\int_{E\cap A} 1\, d\lambda = \int_E h\, d\mu$$

Es decir:

$$\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu$$

donde como $\int_A hd\mu = \lambda(A) \leq \lambda(\Omega)$ que es finita por hipótesis, se deduce que h es integrable respecto de μ, y si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = 0$ (Es decir que λ_a es absoltamente continua.) luego:

$$\lambda(E) = \int_E h\, d\mu + \lambda_s(E)$$

como queríamos demostrar.

Apéndice D

El Dual del Espacio L^p

En este apéndice caracterizaremos el dual del espacio L^p de un espacio de medida utilizando el teorema de Radon-Nikodym.

Si B es un espacio de Banach sobre $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$, su espacio dual B^* se define como

$$B^* = \{l : B \to K \text{ lineales y continuas}\}$$

Es un espacio de Banach con la norma

$$\|l\| = \sup\{|l(f)| : f \in B, \|f\| = 1\}$$

Un problema importante en el análisis funcional es caracterizar el dual de un espacio de Banach dado.

Sea $(E, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $1 \leq p \leq +\infty$, $L^p = L^p(E, \mu)$ y sea q el exponente conjugado de p, es decir: $1/p + 1/q = 1$.

Si $g \in L^q$ pongamos para $f \in L^p$,

$$l_g(f) = \int_E f \cdot g \, d\mu$$

Por la desigualdad de Hölder tenemos que

$$| \, l_g(f) \, | \leq \| \, f \, \|_p \cdot \| \, g \, \|_q$$

por lo tanto l_g es una funcional lineal continua sobre L^p y tenemos que

$$\| \, l_g \, \| \leq \| \, g \, \|_q$$

En el siguiente teorema consideraremos el L^p real:

Teorema D.0.1 *Si $1 \leq p < +\infty$ y la medida μ es σ-finita entonces si $l \in (L^p)^*$ existe una única $g \in L^q$ tal que $l = l_g$. Además $\| \, l_g \, \| = \| \, g \, \|_q$ de modo que la correspondencia $g \to l_g$ es una isometría entre $(L^p)^*$ y L^q*

Demostración:

Etapa 1: Supongamos primero que $\mu(E) < +\infty$. Sea $l \in (L^p)^*$ y pongamos $c = \| l \|$.

Definamos una función $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ en los conjuntos medibles $A \subseteq E$ por

$$\phi(A) = l(\chi_A)$$

(donde χ_A es la función característica de A)

Notemos que ϕ es finita, de hecho:

$$| \phi(A) | \leq c \cdot \| \chi_A \|_p = c \cdot \mu(A)^{1/p}$$

Claramente ϕ es finitamente aditiva: si $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ luego

$$\phi(A \cup B) = l(\chi_A + \chi_B) = l(\chi_A) + l(\chi_B) = \phi(A) + \phi(B)$$

$$\phi(\emptyset) = l(0) = 0$$

Afirmamos que ϕ es σ-aditiva si

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \text{ con los } A_k \text{ disjuntos}$$

escribamos $A = A' \cup A''$ con $A' = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$ y $A'' = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_k$ entonces

$$\phi(A) = \Phi(A') + \phi(\text{A''}) = \sum_{k=1}^{m} \phi(A_k) + \phi(\text{A''})$$

Tenemos que $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Y como $\mu(A) < +\infty$ esta serie converge $\Rightarrow$

$$\mu(\text{A''}) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(A_k) \to 0 \text{ cuando } m \to +\infty$$

Como

$$| \phi(\text{A''}) | \leq c\mu(\text{A''})^{1/p} \Rightarrow \phi(\text{A''}) \to 0 \text{ cuando } m \to +\infty$$

Por lo tanto, $\phi(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi(A_k) \Rightarrow \phi$ es σ-aditiva

Por lo tanto ϕ es una medida finita y como $| \phi(A) | \leq= c\mu(A)^{1/p}$ deducimos que ϕ es absolutamente continua respecto $a\mu$

Entonces, por el teorema de Radon-Nikodym existe una $g \in L^1(E, \mu)$ tal que

$$\phi(A) = \int_A g \, d\mu$$

para cada conjunto medible $A \subseteq E$.

Esto significa que

$$l(\chi_A) = \int_E \chi_A \cdot g \, d\mu$$

En consecuencia, por linealidad,

$$l(f) = \int_E f \cdot g \, d\mu$$

para cada función simple medible f.

Etapa 2: Para mostrar que la misma fórmula vale para cada $f \in L^p$ veamos que $g \in L^q$ y $\| g \|_q \leq c$

Si $p > 1$ elijamos funciones simples h_k no negativas que tiendan en forma creciente a $| g |^q$

Sean g_k las funciones simples definidas por

$$g_k = h_k^{1/p} \cdot \text{sign } g$$

Entonces

$$\| g_k \|_p = \| h_k \|_1^{1/p}$$

y tenemos

$$\int_E g_k \cdot g d\mu = l(g_k) \leq c \| g_k \|_p = c \cdot \| h_k \|_1^{1/p}$$

Como

$$g_k . g = h_k^{1/p} | g | \geq h_k^{1/p} . h_k^{1/q} = h_k^{1/p+1/q} = h_k$$

tenemos que

$$\| h_k \|_1 \leq \int_E g_k . g d\mu \leq c \cdot \| h_k \|_1^{1/p}$$

Podemos suponer $h_k \neq 0$ para k grande (porque sino $g = 0$ en casi todo punto y no habría nada que probar)

Por lo tanto dividiendo ambos lados de la desigualdad por $\| h_k \|_1^{1/p}$ tendremos

$\| h_k \|_1^q \leq c$ pero por el teorema de la convergencia monótona (de Bepo Levi) tenemos que

$$\| g \|_q^q = \int_E | g |^q \, d\mu = \text{lím} \int_E h_k^q d\mu = \text{lím} \| h_k \|_1^q \leq c$$

Esto prueba nuestra afirmación si $p > 1$.

Cuando $p = 1$ queremos ver $g \in L^\infty$ y

$$\| g \|_\infty \leq c$$

Sea $\varepsilon > 0$ y y pongamos

$$M = \{x \in E : | g(x) | \geq c + \varepsilon\}$$

Queremos ver $\mu(M) = 0$

Sea $h = signg \cdot chi_M$ es una función simple

$$l(h) = \int_E h \cdot g \, d\mu = \int_M | g | \, d\mu \geq (c + \varepsilon) \cdot \mu(M)$$

pero por otra parte $l(h) \leq c \parallel h \parallel_1 = c\mu(M)$. De modo que $(c+\varepsilon)\cdot\mu(M) \leq c \leq \mu(M)$

Si fuera $\mu(M) \neq 0 \Rightarrow c+\varepsilon \leq c$ lo cual es absurdo. Por lo tanto $\mu(M) = 0 \Rightarrow \mid g(x) \mid \leq c+\varepsilon$ en casi todo punto.

Como ε es arbitrario, deducimos que

$$\Rightarrow \parallel g \parallel_\infty \leq c$$

Etapa 3: Para ver que $l(f) = \int_E f \cdot g \, d\mu$ para cualquier $f \in L^p$, elijamos una sucesión de funciones simples f_k que converjan a f en norma p. (usando el hecho de que las funciones simples de L^p son densas en L^p)

Entonces $l(f_k) \to l(f)$ por ser l continua. Vamos a ver que

$$l(f_k) = \int_E f_k \cdot g d\mu \to \int_E f \cdot g \, d\mu$$

En efecto, por la desigualdad de Hölder tenemos que:

$$\mid \int_E f_k \cdot g \, d\mu - \int_E f \cdot g \, d\mu \mid \leq \mid f_k - f \mid \cdot \mid g \mid \; d\mu \leq \parallel f_k - f \parallel_p \cdot \parallel g \parallel_q \to 0$$

cuando $k \to +\infty$. Esto prueba que $l = l_g$

Sabemos que

$$c = \parallel l \parallel = \parallel l_g \parallel \leq \parallel g \parallel_q$$

y que

$$\parallel g \parallel_q \leq c$$

por lo tanto tenemos

$$\parallel g \parallel_q = c$$

Esto muestra que la correspondencia $T : L^q \to (L^p)^*$ dada por $T(g) = l_g$ conserva la norma. Es claro que es lineal y lo anterior muestra que es suryectiva

Es inyectiva pues

$$\parallel l_g - l_{g'} \parallel = \parallel T(g) - T(g') \parallel = \parallel T(g-g') \parallel = \parallel g - g' \parallel_q$$

por lo tanto si $l_g = l_{g'} \Rightarrow g = g'$ en casi todo punto.

Etapa 4: Consideremos ahora el caso en que $\mu(E) = +\infty$ pero μ es σ-finita, entonces podemos escribir

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

con

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_k \subseteq E_{k+1} \subseteq \ldots$$

donde

$$\mu(E_k) < +\infty$$

Haremos la demostración suponiendo que $1 < p < +\infty$. Notamos que $L^p(E_k) \subseteq L^p(E)$ (dada $f \in L^p(E_k)$ la extendemos a E poniendo

$$f(x) = 0 \text{ si } x \notin E_k)$$

La restricción de $laL^p(E_k)$ es una funcional lineal continua y por lo antes demostrado existe una única $g_k \in L^q(E_k)$ tal que

$$l(f) = \int_{E_k} f \cdot g_k \, d\mu$$

para $f \in L^p(E)$ que se anula fuera de E_k.

Para una tal f como $E_k \subseteq E_{k+1}$ tenemos:

$$l(f) = \int_{E_k} f.g_{k+1} d\mu = \int_{E_k} f \cdot g_{k+1} \, d\mu$$

Esto implica que $g_k = g_{k+1}$ en casi todo punto de E_k. Podemos asumir $g_k = g_{k+1}$ en todo punto de E_k.

Definamos g por $g(x) = g_k(x)$ si $x \in E_k$. Entonces g es medible y

$$\| g \|_q^q = \int_E | g |^q \, d\mu = \lim_{k\to+\infty} \int_E |g_k|^q \, d\mu \text{ (por Bepo Levi)} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \int_{E_k} |g_k|^q d\mu = \lim_{k\to\infty} \| l_{/L^p(E_k)} \|^q$$

pero

$$\| l_{/L^p(E_k)} \| \leq \| l \| \Rightarrow \| g \|_q \leq \| l \|$$

(en particular $g \in L^q(E)$).

Si $f \in L^p \Rightarrow f \cdot \chi_{E_k}$ converge en L^p a f pues

$$\| \text{ f}\cdot\chi_{E_k} - f \|_p^p = \int_E | f\cdot\chi_{E_k} - f |^p \, d\mu = \int_{E-E_k} |f|^p d\mu = \int_E | f |^p \, d\mu - \int_{E_k} | f |^p \, d\mu$$

y cuando $k \to +\infty$

$$\int_{E_k} | f |^p \, d\mu \to \int_E | f |^p \, d\mu$$

por Bepo Levi. Sea $f_k = f \cdot \chi_{E_k}$. Por lo anterior

$$\| f_k - f \|_p^p \to 0 \Rightarrow l(f_k) \to l(f)$$

(por ser l continua) Pero

$$l(f_k) = \int_{E_k} f_k \cdot g_k \, d\mu = \int_E f_k \cdot g \, d\mu$$

Por la desigualdad de Hölder $f \cdot g \in L^1$.

Tenemos que

$$\int_E f_k \cdot g \, d\mu \to \int_E f \cdot g \, d\mu$$

pues $| f_k \cdot g | \leq | f \cdot g |$, y podemos aplicar el teorema de la convergencia mayorada. Por lo tanto, haciendo que $k \to +\infty$ tenemos que

$$l(f) = \int_E f \cdot g \, d\mu$$

Por la observación previa, entonces

$$\| l \| \leq \| g \|_q$$

de modo que

$$\| l \| = \| g \|_q$$

y la prueba está completa. □

Ejercicios

1. Completar la prueba si $p = 1$.
2. Extender el teorema al L^p complejo. (Si l es una funcional lineal sobre el L^p complejo su parte realrestringida al L^p real es una funcional sobre el L^p real)

Nota: En cambio, el teorema D.0.1 no es cierto para $p = \infty$. Para verlo, consideramos $E = [0, 1]$ (con la medida de Lebesgue). Sea $C[0, 1] \subset L^\infty[0, 1]$ el subespacio de las funciones continuas. Podemos definir una funcional lineal $\gamma : C[0, 1] \to K$ por $\gamma(f) = f(0)$. Por el teorema de Hanh-Banach[1] γ se puede extender a una funcional lineal continua $\widetilde{\gamma} : L^\infty[0, 1] \to K$. Si existiera $g \in L^1[0, 1]$ tal que $\widetilde{\gamma} = l_g$ esto significaría en particular que:

$$f(0) = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$$

para toda función continua $g \in C[0, 1]$. Elijamos ahora como f una de las aproximaciones de la identidad $K_\varepsilon(x - x_0)$ que contruimos en el capítulo 7, donde podemos elegir K como una función suave con integral 1 soportada en $[-1, 1]$. Vemos que:

$$0 = \int_0^1 K_\varepsilon(x_0 - x) \, g(x) \, dx$$

para $x_0 \in (0, 1)$ y $\varepsilon < |x_0|$. Pero extendiendo g a $\mathbb{R}$ por cero, y usando el teorema 7.7.2 deducimos que $g = 0$ en casi todo punto. Esto sin embargo es una contradicción, porque implicaría que $\gamma(f) = 0$ para toda $f \in C[0, 1]$).

[1] Ver por ejemplo [Rud87], teorema 5.16. Este teorema se ve en los cursos de análisis funcional.

Bibliografía

Referencias Básicas del Curso

[FZ96] Norberto Fava and Felipe Zó. *Medida e integral de Lebesgue.* Red Olímppica, Buenos Aires, 1996.

[WZ77] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund. *Measure and integral.* Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.

Otras Referencias

[Bil95] Patrick Billingsley. *Probability and measure.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, third edition, 1995. A Wiley-Interscience Publication.

[Bri08] Wilman Brito. Las integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil. *Universidad de los Andes. Mérida, Venezuela*, 2008.

[dG76] Miguel de Guzmán. *Differentiation of integrals in* $\mathbb{R}^n$. Lecture Notes in Math., Vol. 541. Springer, Berlin, 1976.

[Fer76] Pedro Jesus Fernandez. *Medida e integração*, volume 2. IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

[FK72] Sergei Fomín and Andréi Kolmogorov. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional.* 1972.

[Hal50] Paul R. Halmos. *Measure Theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950.

[Nat16] Isidor Pavlovich Natanson. *Theory of functions of a real variable.* Courier Dover Publications, 2016.

[RPPCT59] Julio Rey Pastor, Pedro Pi Calleja, and César Trejo. Análisis matemático. Technical report, 1959. (volumen 3, capítulo XXIV).

[RSN90] Frigyes Riesz and Béla Sz.-Nagy. *Functional analysis*. Dover Books on Advanced Mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1990.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

Referencias sobre temas conexos

[Bar14] Michael F. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.

[Bre84] Haïn Brezis. *Análisis funcional: teoría y aplicaciones*. Alianza, 1984.

[Gar07] D. J. H. Garling. *Inequalities: a journey into linear analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[Mon08] Adriana Ocejo Monge. La integral de Henstock-Kurzweil y el teorema fundamental del cálculo. *Tesina. Universidad de Sonora, Mexico*, 2008.

Artículos Originales

[Aus65] Donald Austin. A geometric proof of the Lebesgue differentiation theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:220–221, 1965.

[B0́0] Diómedes Bárcenas. The fundamental theorem of calculus for Lebesgue integral. *Divulg. Mat.*, 8(1):75–85, 2000.

[Bar98] Franck Barthe. Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof. *Geom. Funct. Anal.*, 8(2):234–242, 1998.

[Bec75] William Beckner. Inequalities in Fourier analysis. *Ann. of Math. (2)*, 102(1):159–182, 1975.

[Bra89] Richard C. Bradley. An elementary treatment of the Radon-Nikodým derivative. *Amer. Math. Monthly*, 96(5):437–440, 1989.

[Duo07] Javier Duoandikoetxea. The Hardy-Littlewood maximal function and some of its variants. In *Advanced courses of mathematical analysis. II*, pages 37–56. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.

[Ego11] Dimitri. Egorov. Sur les suites des fonctions mesurables. *CR Acad. Sci. Paris*, 152:244–246, 1911.

[HL30] Godfrey Harold Hardy and John Edensor Littlewood. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Mathematica*, 54(1):81–116, 1930.

[Sch03] Anton R. Schep. And still one more proof of the Radon-Nikodym theorem. *Amer. Math. Monthly*, 110(6):536–538, 2003. (Una versión actualizada y mejorada que fue publicada por el autor en su página personal) http://people.math.sc.edu/schep/Radon-update.pdf.

[Sel02] Thomas Sellke. Yet another proof of the Radon-Nikodým theorem. *Amer. Math. Monthly*, 109(1):74–76, 2002.

[Sev10] Carlo Severini. Sulle successioni di funzioni ortogonali. *Atti Acc. Gioenia (5)*, 3:10, 1910.

[Sol70] Robert M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. of Math. (2)*, 92:1–56, 1970.

[Ste20] Hugo Steinhaus. Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive. *Fundamenta Mathematicae*, 1(1):93–104, 1920.

[Vit08] Giuseppe Vitali. Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali. *Atti Accad. Sci. Torino*, 43:75–92, 1908.

[VN40] John Von Neumann. On rings of operatorw iii. *Annals of Mathematics*, 41:94–161, 1940.

[Wie39] Norbert Wiener. The ergodic theorem. *Duke Math. J.*, 5(1):1–18, 1939.