# Lógica Proposicional y Tablas de Verdad parte II: implicación - tautologías

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

# La implicación $\Rightarrow$

La implicación $p \Rightarrow q$ corresponde a la expresión "Si p, entonces q" en el lenguaje coloquial. En la lógica matemática $p \Rightarrow q$ se considera equivalente a $\neg p \vee q$ (es decir "o bien $p$ es falsa, o sino $q$ es verdadera").

En consecuencia la tabla de verdad de la implicación es:

| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

Esta definición está justificada por la validez de la regla de inferencia conocida como Modus Ponens: si $p \Rightarrow q$ es verdadera, y $p$ es verdadera, entonces $q$ es verdadera.

# Paradojas de la implicación

Se deduce que una proposición falsaimplica lógicamente cualquier cosa. Por ejemplo,

`Si 2 es un número impar. entonces 10 es un número primo.`

se considera una proposición verdadera, aún cuando las propoisiciones

*"2 es un número impar"*

*"10 es un número primo"*

son ambas falsas. Esto puede parecer paradójico a primera vista, pero obsérvese que la tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ significa que la única manera de demostrar que una implicación $p \Rightarrow q$ es falsa, es mostrando (un caso en el que) $p$ es verdadera pero $q$ es falsa. Por ejemplo para demostrar que la proposición

*"Si un número entero $n$ es par, entonces $n+1$ es par."*

es falsa, basta observar que si $n$ es igual a 2 entonces $p$ ($n$ es par) resulta verdadera. pero $q$ ($n+1$ es par) resulta falsa.

# Implicaciones e inclusión de conjuntos

En el lenguaje de los cojuntos, el concepto asociado a la implicación es el de inclusión de comjuntos. Un conjunto $A$ está incluido en el conjunto $B$, si para todo $x$ si $x \in A$ entonces $x \in B$. En símbolos,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Aquí $\forall x$ denota al cuantificador universal. "Para todo $x$"

Veamos algunos ejemplos:

- Si $A =$ múltiplos de 4 (en el universo de los números naturales) y $B =$ números pares, $A \subset B$ porque si un número $x$ es múltiplo de 4, entonces es par.
- Si $B$ es cualquier conjunto, $\emptyset \subseteq B$ (El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto).
  Para comprobarlo, notemos que para cualquier $x$, la proposición $x \in \emptyset$ es falsa. Y por la observación que hicimos antes,¡esto siempre implica que $x \in B$ ! (sin importar quien sea $B$).

# Equivalencia Lógica ($\Leftrightarrow$)

Finalmente, intoduciremos el conectivo lógico $p \Leftrightarrow q$ significado de "$p$ si y sólo si $q$", o "$p$ es lógicamente equivalente a "q". Lo definimos como significando

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

En consecuencia, su tabla de verdad será:

| $p$ | $q$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $F$ | $V$ |

Este conectivo corresponde a la igualdad entre conjuntos pues si $A$ y $B$ son conjuntos, decimos que son iguales cuando para cualquier elemento $x$, $x$ pertenece a $A$ si y sólo si $x$ está en $B$.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

# Tautologías

Una tautología es una fórmula del cálculo proposicional que es verdadera, no importa cuáles sean los valores de verdad de las proposiciones que intervienen.

Con frecuencia, chequear la validez de una fórmula referida a varios conjuntos, es equivalente a verificar que una cierta fórmula del cálculo proposicional es una tautología.

Por ejemplo, consideremos una de las leyes de De Morgan de la Propoisición 1.1.6 del apunte de la materia

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Llamando $p$ a la proposición $x \in A$, y $q$ a la proposición $x \in B$ vemos que es equivalente a verificar que la fórmula

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

es una tautología.

# Tautologías (2)

Podemos chequear que la siguiente fórmula (llamémosla $T$) es una tautología

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

mediante la siguiente tabla de verdad, donde se comprueban todos los casos:

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee g)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $T$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ |

# Bonus Track

Si quieren saber cómo generé la tabla anterior, lo hice mediante un pequeño programa en el lenguaje de programación Python (¡ustedes pueden usar su lenguaje favorito!). Lo pueden ver en

https://github.com/pdenapo/programitas-algebraI/blob/master/Python/2020/DeMorgan.py

Se deduce que comprobar o no la validez de una tautología puede realizarse mediante un algoritmo. Es decir un procedimiento mecánico que una computadora puede ejecutar.

Sin embargo, notemos que una tabla de verdad para una fórmula booleana con $n$ variables proposicionales, tiene $2^n$ filas (hay que chequear $2^n$ casos posibles). ¡Este número crece muy rápido con $n$! Con lo que resulta poco práctico si el número de variables $n$ es muy grande.