Lógica Proposicional y Tablas de Verdad parte I: conectivos lógicos

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

Lógica Matemática

- En la clase de hoy, veremos algunas ideas básicas de la lógica matemática. Esta parte de la matemática aplica los métodos de la matemática a la lógica.
- Particularmente estudiaremos lo que se conoce como lógica proposicional o cálculo proposicional.
- Se desarrolló especialmente a partir de los trabajos del matemático y lógico inglés George Boole (1815–1864), por lo que se la conoce también como lógica booleana.
- Probablemente hayan estudiado este tema en la materia Introducción al Pensamiento Científico del CBC. Los alumnos de computación también lo profundizarán más adelante en la materia Lógica y Computabilidad (que los de matemática pueden hacer como materia optativa).

Proposiciones y Valores de Verdad

- Una proposición () una afirmación que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo

  ``‘‘2 es un número par’’``

  ``‘‘Todo triángulo tiene cuatro lados’’``

  son dos proposiciones (la primera es verdadera, la segunda es falsa).
- Toda la matemática se hace con proposiciones.
- Decimos que el valor de verdad de una proposición es verdadero (V) o falso (F), según sea el caso.

Conectivos Lógicos

Si p y q son dos proposiciones, podemos formar nuevas proposiciones por medio de los conectivos lógicos. La tabla siguiente resume sus diferentes nombres y significados:

Lógica matemática	lenguaje cotidiano	computación (inglés)
$\neg p$	no p	NOT p
$p \wedge q$	p y q	p AND q
$p \vee q$	p o q (no excluyente)	p OR q
$p \veebar q$	p o q (excluyente)	p XOR q
$p \Rightarrow q$	si p entonces q	
$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q	

La idea clave es que estas expresiones de uso frecuente en los razonamientos matemáticos, pueden tratarse como operaciones matemáticas entre las proposiciones. Y que los valores de verdad de estas proposiciones compuestas, están determinados por los de p y q. Analizaremos a continuación cada conectivo lógico en detalle.

Aplicaciones de los conectivos lógicos

- Los conectivos lógicos se emplean en todos los lenguajes de programación, para poder expresar condiciones bajo las cuales deba ejecutarse o no una parte del programa. Generalmente se utilizan en los los nombres en inglés, indicados en la última columna de la tabla anterior.
- Las operaciones con conjuntos se definen usando estos conectivos lógicos.

El conectivo no ($\neq$)

El conectivo "no" opera del siguiente modo: la proposición "no p" (simbolizado $\sim p$) es verdadera si p es falsa, y falsa si p es verdadera. En una tabla de verdad, esto se simboliza así:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Es un conectivo unario. Esto significa que opera sobre una sola propoisición. Los demás conectivos son binarios (operan sobre dos proposiciones).

En el lenguaje de los conjuntos, la negación corresponde a la noción de complemento con respecto a un conjunto universal dado:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$$

El conectivo *y* ($\wedge$)

Estos conectivos se definen por medio de tablas de verdad. Por ejemplo, la proposición “p y q” (o en la notación usual de la lógica matemática $p \wedge q$), es verdadera cuando p y q sean verdaderas. Esto se expresa en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Este conectivo está ligado a la intersección de conjuntos pues la definición de esta operación es: un elemento x pertenece a la intersección $A \cap B$ de dos conjuntos A y B si y sólo si x está en A y x está en B. En símbolos:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Dos significados de la pabra o

- El conectivo "o" merece un mayor cuidado, ya que debemos distinguir entre el "o excluyente" que excluye la posibilidad de que ambas afirmaciones sean verdaderas y el "o no-excluyente" que admite esta posibilidad. En el lenguaje cotidiano, "o" suele tomar el primero de estos significados.
- Por ejemplo cuando decimos

  "O vamos al cine, o vamos al teatro."

  damos por sentado que no podemos hacer ambas cosas a la vez.
- En cambio, en el lenguaje matemático, es más frecuente el uso del "o" en el sentido no exclusivo. Por ejemplo, la proposición

  Para todo par n,m de números naturales, $n \geq m \vee m \geq n$

  es verdadera. (¡aún si n y m fueran iguales!)

Los conectivo *o* no-excluyente ($\vee$) y *o* excluyente ($\veebar$)

La tabla de verdad de “p o q en el sentido no exclusivo” (simbolizado $p \vee q$) es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

mientras que la de “p o q en el sentido exclusivo” (simbolizado $p \veebar q$) es

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Relación de estos conectivos con las operaciones de conjuntos

- El conectivo $\vee$ está asociado a la unión de conjuntos pues la definición de esta operación puede escribirse así:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

- En cambio, al conectivo $\veebar$ corresponde la operación de diferencia simétrica de conjuntos, cuya definición es:

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$$

Ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$$