Sumatorias Telescópicas

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

Introducción - Sumatorias telescópicas

En la clase de hoy vamos, seguiremos trabajando con sumatorias.

En un video anterior aprendimos a demostrar una fórmula para una sumatoria utilizando la inducción matemática. Sin embargo este método tiene una limitación intrínseca: debemos conocer (o conjeturar) de antemano qué fórmula queremos demostrar.

Por eso es interesante, desarrollar métodos para calcular sumatorias sin utilizar inducción. Hoy veremos uno de ellos: las sumatorias telescópicas. Se basa en considerar sumatorias de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)]$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$(o $\mathbb{C}$) es una función (¡es decir una sucesión!).

Desarrollando una suma telescópica

Si desarrollamos la suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + [f(4) - f(3)] + \ldots + [f(n) - f(n-1)] + [f(n+1) - f(n)]$$

Usando la propiedad asociativa, vemos que cada término se cancela con el anterior. Queda:

Suma telescópica - Ejercicio 10, práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$$

Prueba formal, por inducción.

La fórmula anterior se puede probar formalmente por inducción. Llamémosla $P(n)$.

- Caso base ($P(1)$):

$$\sum_{k=1}^{1} [f(k+1) - f(k)] = f(2) - f(1)$$

- Paso inductivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} [f(k+1) - f(k)] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] \right\} + [f(n+2) - f(n+1)]$$

  y usando la hipótesis inductiva

$$= [f(n+1) - f(1)] + [f(n+2) - f(n+1)] = f(n+2) - f(n+1)$$

  ‘

Usando el principio de inducción matemática, concluimos que la fórmula es cierta para todo n.

Aplicación I

Ahora veremos varias aplicaciones de nuestra fórmula. Comencemos eligiendo $f(k) = k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2 - 1$$

Si desarrollamos el cuadrado del binomio usando la fórmula $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k^2 + 2k + 1) - k^2] = (n^2 + 2n + 1) - 1$$

o simplificando

$$\sum_{k=1}^{n} [2k+1] = n^2 + 2n$$

Ahora usamos las propiedades de linealidad de la sumatoria (ver clase anterior)

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^2 + 2n$$

Aplicación I (parte 2)

Pero

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Nos queda:

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + n = n^2 + 2n$$

o despejando

Ejercicio 3 de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicación II

Para una segunda aplicación, elijamos $f(k) = k^3$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1$$

Nuevamente podemos desarrollar esta suma utilizando la fórmula del cubo de binomio

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Nos queda:

$$\sum_{k=1}^{n} [k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3] = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1$$

o sea: Nos queda:

$$\sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Aplicación II (continuación)

Usando como antes la linealidad de las sumatorias nos queda:

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^3 + 3n^2 + 3n$$

o sea reemplazando la sumatoria que calculamos antes

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\frac{n^2+n}{2}\right] + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Luego:

Ejercicio 7 i) de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{n\,(n+1)](2\,n+1)}{6}$$

Un ejercicio para ustedes

Análogamente utilizando la función $f(k) = k^4$ en la suma telescópica, y la fórmula de la potencia cuarta del binomio

$$x^4 + 4\,x^3 y + 6\,x^2 y^2 + 4\,xy^3 + y^4$$

Ustedes pueden demostrar la fórmula del

Ejercicio 7 ii) de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Generalización

En general las potencias del binomio pueden desarrollarse mediante la fórmula del binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

que aparece en la sección 3.3.3 del apunte de la profesora Krick. Los coeficientes son los números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esto veremos en la unidad siguiente. Usando esto podrían calcular recursivamente las sumas

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

con $p \in \mathbb{N}$ y demostrar (¡por inducción!) que pueden expresarse como un polinomio en n de grado $p+1$ con coeficientes racionales.‘

Aplicación III: suma geométrica

En la fórmula de la suma telescópica el índice puede comenzar en cero:

$$\sum_{k=0}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(0)$$

Elijamos $f(k) = a^k$ donde $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Nos queda:

$$\sum_{k=0}^{n} [a^{k+1} - a^k] = a^{n+1} - 1$$

Sacando factor común a^k primero y $a-1$ despueś, podemos escribir esto como

$$\sum_{k=0}^{n} a^k[a-1] = [a-1]\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{k+1} - 1$$

Ejercicio 9 de la práctica 2

$$\text{Si } a \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Conclusión

En la clase hoy vimos que la fórmula de la suma telescópica

Suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$$

es muy útil para obtener expresiones explícitas de sumatorias.

En el ejercicio 10 items ii) y iii) de la práctica aparecen otras aplicaciones.