Una sumatoria con combinatorios (Un ejercicio de la práctica 3)

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

Introducción: Planteo del ejercicio

En la clase de hoy vamos a calcular la sumatoria

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

que es el ejercicio 25 ii) de la práctica 3. Aquí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

son los números combinatorios que cuentan cuántos subconjuntos de k elementos podemos formar a partir de uno de n elementos. [ver la sección 3.3 del apunte de la profesora Krick]

Sugiero que intenten resolverlo antes de ver este video.

Propiedades de los números combinatorios I

Suma de todos los combinatorios para un n fijo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Dos maneras de pensarla:

- Interpretación combinatoria: La suma cuenta cuándos subconjuntos se pueden formar con un conjunto de n elementos.
- A partir del binomio de Newton: Desarrollamos $(1+1)^n$ con la fórmula del binomio:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Propiedades de los números combinatorios II

Números combinatorios complementarios

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

De nuevo, hay dos maneras de pensarla:

- Interpretación combinatoria: Hay tantos subconjuntos de $n-k$ elementos en uno de n elementos, como suboconjuntos de k elementos.
  Si A tiene n elementos, y $B \subset A$, entonces B tiene k elementos sí y sólo si $A - B$ tiene $n-k$.
- También es inmediata a partir de la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

Volvamos a nuestro ejercicio . . .

Queríamos calcular la suma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

La idea es relacionarla con la suma con $0 \leq k \leq 2n+1$ que sabemos calcular por la primer propiedad que mencionamos de los números combinatorios:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

Entonces partimos la sumatoria en dos partes:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

El primer término es la sumatoria que deseamos calcular.

Continuación de nuestro ejercicio ...

Miremos ahora la segunda suma

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

Hacemos el cambio de índice $j = 2n+1-k \Leftrightarrow k = 2n+1-j$. Notamos que cuando k recorre el conjunto

$$\{n+1, n+2, \ldots, 2n, 2n+1\}$$

j recorre el conjunto

$$\{n, n-1, \ldots, 1, 0\}$$

Luego, usando la propiedad de los números combinatorios complementarios

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j=n}^{0} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{j}$$

Conclusión de nuestro ejercicio . . .

Entonces en la descomposición que hicimos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

las dos sumatorias del primer miembro ¡valen lo mismo! y nos queda:

$$2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

o sea

Respuesta del ejercicio

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

Bonus track: verifiquemos que la fórmula es correcta ...

Programita de comprobación de la fórmula en Python 3

```
import scipy
from scipy import special
from scipy.special import binom

def s(n):
    return sum([scipy.special.binom(2*n+1,k)
                for k in range(0,n+1)])

for n in range (1,10):
  print ("n=",n,"s(n)=",s(n),"nos dio=", 2**(2*n))
```

Aquí usé la función para calcular los números combinatorios (coeficientes binomiales) provista por la librería Scipy.

https://docs.scipy.org/doc/scipy-0.14.0/reference/generated/scipy.special.binom.html

Bonus track: verifiquemos que la fórmula es correcta . . .

Salida del programa

```
$ python3 suma.py
n= 1 s(n)= 4.0 nos dio= 4
n= 2 s(n)= 16.0 nos dio= 16
n= 3 s(n)= 64.0 nos dio= 64
n= 4 s(n)= 256.0 nos dio= 256
n= 5 s(n)= 1024.0 nos dio= 1024
n= 6 s(n)= 4096.0 nos dio= 4096
n= 7 s(n)= 16384.0 nos dio= 16384
n= 8 s(n)= 65536.0 nos dio= 65536
n= 9 s(n)= 262144.0 nos dio= 262144
```

Así que ¡nuestra solución es correcta!

Ejercicio: Programar su propia función para calcular los números combinatorios.