$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{`n+1} a_n$$

$$a_n \leq \frac{1}{2n}\binom{2n}{n}$$

caso base $n = 1$

$$a_1 \leq \frac{1}{2}\binom{2}{1} = 1$$

Definimos

$$b_{n`} = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Para ayudarnos en el paso inductivo, vamos a investigar primero qué recurrencia satisfacen los b_n

$$b_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!(n+1))^2} = \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{(n!)^2(n+1)^2} = b_n \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}$$

$$b_n = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} b_{n+1}$$

Paso inductivo: Queremos probar que

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)} b_{n+1}$$

suponiendo que

$$a_n \leq \frac{1}{2n} b_n$$

Por la recurrencia para a_ny la hipótesis inductiva, tenemos que:

$$a_{n+1} = \frac{2n+1}{`n+1} a_n \leq \frac{2n+1}{`n+1}\frac{1}{2n} b_n$$

Luego, por la recurrencia para los $b_n$tenemos que:

$$a_{n+1} \leq \frac{(2n+1)}{`n+1} \cdot \frac{1}{2n}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} b_{n+1}$$

$$a_{n+1} \leq \frac{1}{`n+1} \cdot \frac{1}{2n}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)} b_{n+1}$$

$$a_{n+1} \leq \cdot \frac{1}{2n} \frac{n+1}{2(n+1)} b_{n+1}$$

$$a_{n+1} \leq \cdot \frac{1}{4n} b_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+1)} b_{n+1}$$

El último paso va a estar bien si y sólo si

$$\frac{1}{4n} \leq \frac{1}{2(n+1)} \Leftrightarrow 2(n+1) \leq 4n \Leftrightarrow 2n+2 \leq 4n \Leftrightarrow 2 \leq 2n \Leftrightarrow 1 \leq n$$

¡lo cual es cierto para todo n !