Si a es imnpar, entonces:

$$2^{n+2}|a^{2^n}-1$$

n=1 Queremos probar

$$8=2^3|a^2-1$$

Sabemos que b es impar, entonces

$$a=2b+1$$

con b entero

$$a^2-1=(a+1)(a-1)=(2b+2)2b=2(b+1)2b=4b(b+1)$$

Separamos en 2 casos
* b par => $b=2c$ con c entero

$$a^2-1=4\cdot 2c\cdot(2c+1)=8[c(2c+1)]$$

luego este caso está bien.
* b impar => $b=2c$+1 con c entero

$$a^2-1=4(2c+1)(2c+2)=8(2c+1)(c+1)$$

de vuelta, 8 lo divide.

Paso inductivo: suponemos que para un cierto n

$$2^{n+2}|a^{2^n}-1$$

queremos ver que

$$2^{n+3}|a^{2^{n+1}}-1$$

$$a^{2^{n+1}}-1=a^{2\cdot 2^n}-1=(a^{2^n})^2-1^2=(a^{2^n}-1)(a^{2^n}+1)$$

Por la hipótesis indeuctiva

$$a^{2^n}-1=2^{n+2}d$$

con d entero.

$$a^{2^{n+1}}-1=2^{n+2}d\cdot(a^{2^n}+1)$$

Pero observemos que a era impar => a^{2^n}es impar => $a^{2^n}+1$ es par

$$a^{2^n}+1=2e$$

con e otro entero.

$$a^{2^{n+1}}-1=2^{n+2}d\cdot 2e=2^{n+3}\cdot(d\cdot e)$$

como $d\cdot e$ es entero =>

$$2^{n+3}|a^{2^{n+1}}-1$$

Por el principio de inducción matemática la propiedad vale para todo n.