Calcular el resto módulo 9 de

$$\sum_{n=0}^{1000}(2n)!+4^{n^4+n}$$

$$[\sum_{n=0}^{1000}(2n)!]+[\sum_{n=0}^{1000}4^{n^4+n}]$$

$$\sum_{n=0}^{1000}(2n)!\equiv 0!+2!+4!=1+2+24\equiv 1+2+6=9\equiv 0$$

$$6!=720\equiv 0\,(mod\,9)$$

$$(2n)!\equiv 0$$

si $n\geq 3$

$$(2n)!=1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)\equiv(1.2.3.4.5.6).\prod_{k=7}^{2n}k=720\cdot\prod_{k=7}^{2n}k\equiv 0\cdot\prod_{k=7}^{2n}k=0$$

$--$

$4^0=1,4^1=4,4^2=16\equiv 7,4^3=64\equiv 1,4^4=4^3{\cdot}4\equiv 1{\cdot}4=4,4^5\equiv 4^3{\cdot}4^2\equiv 1{\cdot}4^2\equiv 7,...$

El resto de 4^kmódulo 9 depende sólo del resto de k módulo 3

$$k=3q+r$$

$$4^k=4^{3q+r}=(4^3)^q\cdot 4^r\equiv 1\cdot 4^r\equiv 4^r\,(mod\,9)$$

Para calcular el resto de

$$4^{n^4+n}$$

módulo 9 vamos a tener que estudiar en qué clase módulo 3 cae $k=n^4+n$ lo cuál depende sólo del resto de n módulo 3. Luego me basta mirar los casos $n=0,1,2$

$$4^0=1$$

$$4^2\equiv 7(mod\,9)$$

$$4^{84}\equiv 4^0\equiv 1\,(mod\,9)$$

$$1{+}7{+}1\equiv 9\equiv 0\,(mod\,9)$$

$$\sum_{n=0}^{1001} 4^{n^4+n} \equiv (1+7+1)+(1+7+1)+\ldots+(1+7+1) \equiv 0$$

(hay 1002 términos en la serie, $1001 = 3 \cdot 334$ se repite 334 veces)

$$\sum_{n=0}^{1001} 4^{n^4+n} = \sum_{n=0}^{1000} 4^{n^4+n} + 4^{1001^4+1001}$$

$$4^{1001^4+1001} \equiv 1$$

$$0 \equiv \sum_{n=0}^{1000} 4^{n^4+n} + 1$$

$$\sum_{n=0}^{1000} 4^{n^4+n} \equiv -1 \equiv 8\,(mod\,9)$$

$$[\sum_{n=0}^{1000}(2n)!] + [\sum_{n=0}^{1000} 4^{n^4+n}] \equiv 0 + 8 \equiv 8$$

‘