# Polinomios (parte 4)

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2020

# Parte I

## Raíces Racionales

# Introducción

En general, para polinomios de grado alto, no existe un método general para determinar sus raíces (aunque para polinomios de coeficientes reales, existen métodos numéricos para determinarlas aproximadamente con tanta precisión como se desee, lo cual es suficiente para cualquier aplicación práctica[1]).

Sin embargo, existe un método general para determinar todas las posibles raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales. Sea $P \in \mathbb{Q}[X]$:

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \text{ con } a_l \in \mathbb{Q}$$

Multiplicando a $P$ por el mínimo común múltiplo de los denominadores de los $a_i$, podemos suponer que todos sus coeficientes son enteros, es decir que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

[1] Esto lo verán en el curso de Elementos de Cálculo Numérico (para matemática) o de métodos numéricos (para computación).

# El criterio de Gauss

**Teorema (Criterio de Gauss)**

*Si $P = \sum_{k=0} a_n X^k \in \mathbb{Z}[X]$ y $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es una raíz racional de $P$, escrita como fracción irreducible (o sea con $p$ y $q$ coprimos), se tiene necesariamente que $p|a_0$ y que $q|a_n$.*

*En particular, si $P$ es mónico (o sea $a_n = 1$) las posibles racies racionales de $P$ deben ser enteras.*

# Ejemplo 1:

Miremos la ecuación cúbica

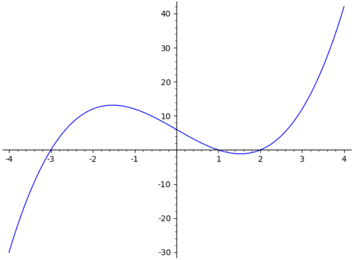
$$P_1(X) = X^3 - 7X + 6 = 0$$

Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de $P_1$, debe ser $q|1$ y $p|6$. Entonces las posibles raíces racionales son

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$$

Probando, vemos que 1, 2 y $-3$ son raíces. Entonces $P$ admite la factorización

$$P_1(x) = (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$$



# Ejemplo 2:

Miremos otra ecuación cúbica

$$P_2(X) = 3X^3 - 5X^2 + 5X - 2$$

Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es raíz de $P_1$, debe ser $q|3$ y $p|-2$. Entonces las posibles raíces racionales son

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3} \right\}$$

Probando resulta que $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ es la única raíz racional. Usando la regla de Ruffini podemos encotrar su factorización en $\mathbb{Q}[X]$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & -5 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & & 2 & -2 & 2 \\ \hline & 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}$$

$$P_2(X) = \left( X - \frac{2}{3} \right) \cdot (3X^2 - 3X + 3) = 3 \cdot \left( X - \frac{2}{3} \right) \cdot (X^2 - X + 1)$$

# Ejemplo 2 (continuación)

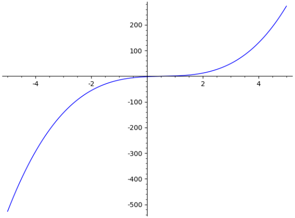
Las raíces del polinomio $X^2 - X + 1$ se pueden encontrar con la fórmula de la ecuación cuadrática. El discriminante es $\Delta = -3 < 0$ luego son complejas conjugadas.

$$\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \alpha_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

Deducimos que la factorización de $P_2$ como producto de irreducibles en $\mathbb{C}[X]$ es

$$P_2(X) = 3(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3) \quad [\alpha_1 = 2/3]$$

mientras que en $\mathbb{Q}[X]$ o $\mathbb{R}[X]$ es la que encontramos antes.



# Ejemplo 3:

$$P_3(X) = 2X^3 + X - 1$$

Las posibles raíces racionales serían $\left\{\pm 1, \pm \frac{1}{2}\right\}$ pero probando resulta que ninguna de estas sirve. En consecuencia, $P_3$ no tiene raíces racionales y es en consecuencia (teniendo grado 3) irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Se puede ver que tiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas.

## Factorizando en $\mathbb{C}[X]$ usando SageMath

```
sage: CX=PolynomialRing(CC,"x")
sage: p3=CX(2*x^3+x+1)
sage: p3.factor()
(2.00000000000000) *
(x - 0.294877256150729 - 0.872271625461329*I) *
(x - 0.294877256150729 + 0.872271625461329*I) *
(x + 0.589754512301458)
```

## Demostración del criterio de Gauss

Como $P(\alpha) = 0$, tendremos:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Luego:

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \ldots + a_2 p q^{n-1} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

En particular:

$$p | a_0 q^n$$

Pero como $p$ es coprimo con $q$, $p$ es coprimo con $q^n$ (como consecuencia del teorema fundamental de la aritmética). Por lo tanto, $p$ debe dividir a $a_0$.

# Demostración del criterio de Gauss (2)

Similarmente:

$$q(a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2}q + \ldots + a_2p^2q^{n-3} + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1}) = -a_np^n$$

Por lo tanto

$$q | a_n p^n$$

Pero como $q$ es coprimo con $p$, $q$ es coprimo con $p^n$; y en consecuencia, $q|a_n$.

# Observación

El criterio de Gauss proporciona una nueva prueba de que si $d \in \mathbb{N}$ no es una potencia $n$-ésima de un entero, $\sqrt[n]{d}$ es irracional. En efecto, por el criterio de Gauss las posibles raíces racionales del polinomio $X^n - d$ (que es mónico) deben ser enteras. Luego si $\sqrt[n]{d}$ no es entero, tampoco puede ser racional.

Parte II

# Raíces Irracionales Cuadráticas de Polinomios con Coeficientes Racionales

# Raíces Irracionales Cuadráticas

## Proposición

*Sea* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *un polinomio con coeficientes racionales, y* $d \in \mathbb{N}$ *un entero que no es el cuadrado de otro entero. Entonces si* $\alpha_1 = a + b\sqrt{d}$ *con* $a, b \in \mathbb{Q}$ *y* $b \neq 0$ *es una raíz de* $P$, $\alpha_2 = a - b\sqrt{d}$ *también lo es.*

# Demostración

Notemos que como $d$ no es un cuadrado, $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, esto es: es un número irracional. En consecuencia, $\alpha_1$ y $\alpha_2$ son también irracionales, ya que sino:

$$\sqrt{d} = \frac{\alpha_1 - a}{b} = \frac{\alpha_2 - a}{(-b)}$$

sería racional. Sin embargo, el polinomio

$$D(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) = X^2 - 2aX + a^2 - db^2$$

tiene coeficientes racionales. Efectuemos la división de polinomios de $P$ por $D$ (en $\mathbb{Q}[X]$), obteniendo un cociente $Q$ y un resto $R$:

$$P = QD + R \text{ con } R = 0 \text{ o } \mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr} D = 2$$

Notemos que entonces, $Q$ y $R$ tienen entonces coeficientes racionales, y que como $R$ tiene grado 1 o 0, deberá escribirse en la forma:

$$R(X) = cX + d \text{ con } c, d \in \mathbb{Q}$$

# Demostración (2)

Si especializamos esta igualdad en $X = \alpha_1$, como por hipótesis $P$ anula a $\alpha_1$, y por construcción $D(\alpha_1) = 0$, tenemos que:

$$R(\alpha_1) = 0$$

Pero, esto no puede suceder ya que si $R \neq 0$, pues si no,

- Si $c \neq 0$,
$$\alpha_1 = -\frac{d}{c} \in \mathbb{Q} \text{ ¡absurdo!}$$
- Si $c = 0$, debería ser $d = 0$, y por lo tanto también $R = 0$.

En cualquier caso, concluimos que $R = 0$, y por lo tanto que $D$ divide a $Q$:

$$P = QD$$

pero como $\alpha_2$ también es raíz de $D$; especializando ahora en $X = \alpha_2$, obtenemos que que $P(\alpha_2) = 0$.