Números Complejos

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2020

Parte I

Las sucesivas extensiones del concepto de número

Las sucesivas extensiones del concepto de número

- Números naturales
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$
- Números naturales con el cero:
$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Números enteros: son un anillo (podemos sumar, restar y multiplicar sin restricciones)
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
- Números racionales: son un cuerpo (además podemos dividir por elementos no nulos).
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$
- Nümeros reales $\mathbb{R}$ (a los racionales les agregamos los irracionales como $\sqrt{2}$, π, e, $\ldots$). Están en correspondencia biunívoca con los puntos de la recta. Son un cuerpo.

Definiciones de anillo y cuerpo

Un anillo es un conjunto A donde están definidas dos operaciones

$$+ : A \times A \to A$$

$$\cdot : A \times A \to A$$

de modo que se verifiquen las siguientes propieades (axiomas de la estructura de anillo):

1. Propiedad Asociativa de la suma:

$$(a+b)+c = a+(b+c) \; \forall \; a,b,c \in A$$

2. Propiedad Conmutativa de la suma

$$a+b = b+a \; \forall \; a,b \in A$$

Definición de anillo (2)

1. Existencia de neutro para la suma Existe un elemento $0 \in A$, tal que:
$$a + 0 = 0 + a = a \,\forall\, a \in A$$
2. Existencia de inversos aditivos Para todo $a \in A$, existe un elemento $-a \in A$, tal que:
$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$
Notamos que en cualquier anillo se puede definir la operación de resta $a - b$ especificando que:
$$a - b = a + (-b)$$
3. Propiedad asociativa del producto
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \,\forall\, a, b, c \in A$$
4. Existencia de elemento neutro para el producto Existe un elemento $1 \in A$ tal que
$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

Definiciones de anillo y cuerpo

1. Propiedad Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \;\forall\; a, b, c \in A$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \;\forall\; a, b, c \in A$$

Si además se verifica que:

$$a \cdot b = b \cdot a \;\forall a, b \in A$$

diremos que A es un anillo conmutativo.

Si A es un anillo conmutativo, donde cada $a \in A$ tal que $a \neq 0$ amite un inverso multiplicativo a^{-1} tal que

$$a \cdot a^{-1} = 1$$

decimos que A es un cuerpo.
En ese caso podemos definir la división por

$$a : b = a \cdot b^{-1}, \quad b \neq 0$$

Parte II

Los números complejos

Motivación

En los números reales $\mathbb{R}$, las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (con divisor no nulo) son posibles sin restricciones. Sin embargo, la operación de raíz cuadrada no es posible sin restricciones.
Por ejemplo

$$\sqrt{-1}$$

o sea econtrar un número x tal que

$$x^2 = -1$$

no tiene sentido en los números reales. Porque el cuadrado de cualquier número real es mayor o igual que cero.
El deseo de poder operar sin restricciones llevó a los matemáticos a inventar un símbolo i (unidad imaginaria) para denotar un número tal que

$$i^2 = -1$$

Definición de los números complejos

Un número complejo será un símbolo de la forma

$$a + b \cdot i$$

donde a, b son números reales. El número a se llama la componente real y el número b la componente imaginaria. Notamos $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos.

Otra forma de pensar los números complejos es como un par ordenado (a, b) donde $a, b \in \mathbb{R}$. [Si lo pensamos de esta manera $\mathbb{C}$ es $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pero con ciertas operaciones que vamos a definir]
Ejemplo: $2 + 3i$ es un número complejo. Si lo pensamos como par ordenado sería el $(2, 3)$.

Al número real a lo identificamos con el número complejo $a + 0 \cdot i$.
Los complejos de la forma $b \cdot i = 0 + b \cdot i$ se llaman números imaginarios puros.

Suma y Resta de Números complejos

Definición

Si $z = a + bi$ *y* $w = c + di$ *son dos números complejos, definimos su suma por*

$$z + w = (a + c) + (b + d)i$$

y su resta por

$$z - w = (a - c) + (b - d)i$$

Observación

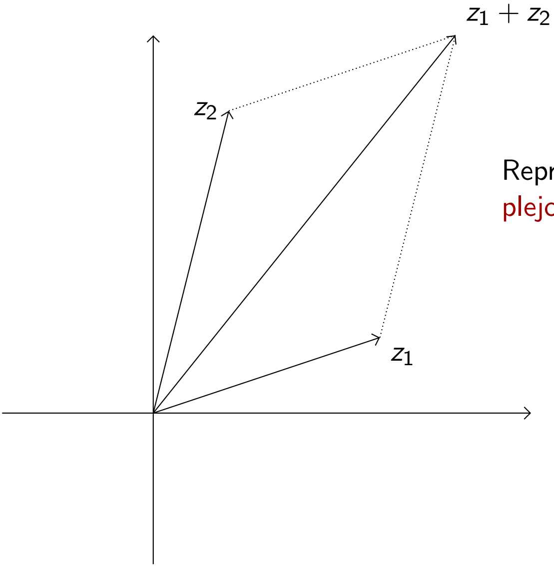
Si lo pensamos como pares estas reglas dicen que si $z = (a, b)$ *y* $w = (c, d)$ *entonces*

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$z - w = (a - c, b - d)$$

que son las reglas usuales para sumar o restar vectores en $\mathbb{R}^2$.

Suma de Números complejos en el plano complejo



Representamos en el plano complejo o plano de Gauss

$$z_1 = 3 + i = 3 + 1 \cdot i$$

$$z_2 = 1 + 4i$$

$$z_3 = z_1 + z_2 = 4 + 5i$$

Producto Números de complejos

Supongamos que $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos. Su producto se define formalmente haciendo haciendo la distributiva y reemplazando i^2 por -1

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 = ac + bci + adi - bd \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

(si quieren, nos olvidamos de los pasos intermedios y tomamos la última linea como definición)
Si lo pensamos como pares ordenados

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Con las operaciones que definimos hasta ahora (suma, resta y producto) los números complejos forman un anillo conmutativo.

Módulo de un número complejo

Si $z = a + bi$ es un número complejo definimos su módulo o valor absoluto por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente da la distancia de z al origen en el plano complejo.

El módulo tiene las siguientes propiedades:

- El módulo de un producto es el producto de los módulos:

  $$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

  (esto lo justificaremos más adelante)
- Desigualdad triangular

  $$|z + w| \leq |z| + |w|, |z - w| \geq |z| - |w|$$

La distancia entre dos números complejos puede definirse por

$$d(z, w) = |z - w|$$

(¡esto permite hacer análisis con los números complejos!)

Complejos conjugados

Si $z = a + b \cdot i$ es un número complejo, $\overline{z} = a - b \cdot i$ se llama el complejo conjugado de z.

Es importante observar qué pasa cuando hacemos operaciones con números complejos conjugados

- $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z \cdot \overline{z} = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

También es útil saber que la operación de tomar conjugado respeta todas las operaciones que definimos hasta ahora:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

División de complejos

Supongamos que $z = a + bi$ y $w = c + di$ son dos números complejos.
Si $w \neq 0$, podemos calcular

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{z \cdot \overline{w}}{|w|^2}$$

Si $z = a + bi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$

$$\frac{z}{\lambda} = \frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda} i$$

$\mathbb{C}$ son un cuerpo.

Parte III

La forma polar de los números complejos

La forma polar de los números complejos

Si $z = x + iy$ es un número complejo, introduciendo coordenadas polares (r, θ) donde

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

es el módulo del complejo z, y θ su argumento, tendremos que:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

En consecuencia, z se escribirá en la forma:

$$z = r \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = r \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Multiplicación de complejos en la forma polar

A partir de las fórmulas de adición para el seno y el coseno, y de la definición del producto de números complejos, se obtiene inmediatamente el siguiente teorema importante:

Teorema (Teorema de De Moivre)

Si

$$z = r \cdot (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

y

$$w = \tilde{r} \cdot (\cos\tilde{\theta} + i \operatorname{sen}\tilde{\theta})$$

son dos números complejos expresados en la forma trigonométrica, entonces

$$z \cdot w = (r \cdot \tilde{r})(\cos(\theta + \tilde{\theta}) + i \operatorname{sen}(\theta + \tilde{\theta})$$

Un poco de ayuda de la materia del al lado...

Recordemos los siguientes desarrollos en serie de Taylor de las funciones trigonométricas para las funciones exponencial y trigonométrica:

$$e^x = \exp(z) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots + \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots + \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)!} + \cdots$$

Como es sabdido desde los cursos de análisis, estos desarrollos son válidos para todo valor de la variable real x.

La fórmula de Euler

Euler se hizo la siguiente pregunta, ¿qué sucedería si estos desarrollos también fueran válidos para valores complejos de la variable x ?.
Por ejemplo, supongamos que $x \in \mathbb{R}$, y desarollemos: e^{ix} utilizando la serie de Taylor de la función exponencial, operando de un modo totalmente formal.

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \cdots + \frac{i^nx^n}{n!} + \cdots$$

Las sucesivas potencias de i son periódicas módulo 4, es decir tenemos

$$i^k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{si} \quad k \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si} \quad k \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{si} \quad k \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Entonces tenemos:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}i + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5!}i - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7!}i + \cdots$$

La fórmula de Euler (2)

y si separamos las partes real e imaginaria

$$e^{ix} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \right) + i \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \right)$$

Con lo que obtenemos formalmente la Fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Esto conduce adoptar la siguiente definición de la exponencial de variable compleja

Definición

Si $z = x + iy$ es un número complejo (con $x, y \in \mathbb{R}$) definimos

$$e^z = \exp(z) = e^x (\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

La fórmula de Euler:Ejemplo

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i \ \operatorname{sen}(\pi) = -1$$

o

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

La fórmula de Euler (3)

La exponencial así definida verifica que

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

En particular tenemos

Teorema (Teorema de De Moivre con la notación exponencial)

Si

$$z = r \cdot e^{i\theta}$$

y

$$w = \tilde{r} \cdot e^{i\tilde{\theta}}$$

son dos números complejos expresados en la forma trigonométrica, entonces

$$z \cdot w = (r \cdot \tilde{r}) \cdot e^{i(\theta+\tilde{\theta})}$$