Algunos Ejercicios de Combinatoria

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2020

Parte I

Una sumatoria con combinatorios (ejercicio 25 ii) de la práctica 3)

Introducción: Planteo del ejercicio

En la clase de hoy vamos a calcular la sumatoria

Enunciado

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

que es el ejercicio 25 ii) de la práctica 3. Aquí

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

son los números combinatorios que cuentan cuántos subconjuntos de k elementos podemos formar a partir de uno de n elementos. [ver la sección 3.3 del apunte de la profesora Krick]

Recordamos algunas propiedades de los números combinatorios

Suma de todos los combinatorios para un n fijo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Números combinatorios complementarios

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Volvamos a nuestro ejercicio ...

Queríamos calcular la suma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$$

La idea es relacionarla con la suma con $0 \leq k \leq 2n+1$ que sabemos calcular por la primer propiedad que mencionamos de los números combinatorios:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

Entonces partimos la sumatoria en dos partes:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

El primer término es la sumatoria que deseamos calcular.

Continuación de nuestro ejercicio ...

Miremos ahora la segunda suma

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

Hacemos el cambio de índice $j = 2n+1-k \Leftrightarrow k = 2n+1-j$. Notamos que cuando k recorre el conjunto

$$\{n+1, n+2, \ldots, 2n, 2n+1\}$$

j recorre el conjunto

$$\{n, n-1, \ldots, 1, 0\}$$

Luego, usando la propiedad de los números combinatorios complementarios

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j=n}^{0} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{2n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n+1}{j}$$

Conclusión de nuestro ejercicio ...

Entonces en la descomposición que hicimos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

las dos sumatorias del primer miembro ¡valen lo mismo! y nos queda:

$$2\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

o sea

Respuesta del ejercicio

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$$

Bonus track: verifiquemos que la fórmula es correcta ...

Programita de comprobación de la fórmula en SageMath/Python 3

```
def s(n):
        return sum([binomial(2*n+1,k) for k in range(0,n+1)])

for n in range (1,10):
        print ("n=",n,"s(n)=",s(n),"nos dio=", 2**(2*n))
```

Pueden descargar Sagemath en `https://www.sagemath.org/`

Bonus track: verifiquemos que la fórmula es correcta ...

Salida del programa

```
sage: load("suma_combinatorios-sage.py")
n= 1 s(n)= 4 nos dio= 4
n= 2 s(n)= 16 nos dio= 16
n= 3 s(n)= 64 nos dio= 64
n= 4 s(n)= 256 nos dio= 256
n= 5 s(n)= 1024 nos dio= 1024
n= 6 s(n)= 4096 nos dio= 4096
n= 7 s(n)= 16384 nos dio= 16384
n= 8 s(n)= 65536 nos dio= 65536
n= 9 s(n)= 262144 nos dio= 262144
```

Así que ¡nuestra solución es correcta!

Ejercicio: Programar su propia función para calcular los números combinatorios.

Parte II

Contando relaciones de equivalencia

Ejercicio 30 de la práctica 3

Enunciado

1. Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?
2. Sea A un conjunto con 3n elementos. ¿Cuántas relaciones de equivalencia pueden definirse en A que cumplan la condición de que para todo $a \in A$ la clase de equivalencia de a tenga n elementos?

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (proposición 1.2.8 en el apunte)

- *Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto no vacío A. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto A sus clases de equivalencia forman una partición de A.*
- *Recíprocamente, P es una partición de A y definimos una relación en A,*

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \exists C \in P : x, y \in C$$

[o sea dos elementos están relacionados si pertenecen al mismo subconjunto en la partición] entonces $\mathcal{R}$ resulta una relación de equivalencia, y P es la partición determinada por sus clases de equivalencia.

Reformulación

Enunciado

- Sea A un conjunto con $2n$ elementos. ¿Cuántas particiones de A podemos armar que tengan 2 clases con n elementos cada una?
- Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas particiones de A podemos armar que tengan 3 clases con n elementos cada una?

Mi primer intento de respuesta a la primera pregunta

Para responder a primera pregunta podríamos razonar así: para determinar una de esas particiones

$$A = A_1 \cup A_2 \quad A_1 \cap A_2 = \emptyset, \#(A_1) = n, \#A_2 = n$$

debemos elegir cuáles de los $2n$ elementos de A ponemos en A_1. Entonces $A_2 = A - A_1$.
Habrá entonces

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

formas de elegir estos n elementos.

¡Pero vamos a ver que hay un error en este razonamiento!

Respuesta a la primera pregunta

¡El error es que este no será el número de particiones!
Porque por ejemplo si $P = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

y

$$P_2 = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}\ \}$$

son la misma partición. Determinan la misma relación de equivalencia. (No interesa el orden de las clases dento de la partición). Y en el razonamiento anterior la contamos 2 veces.
Entonces debemos dividir el resultado anterior por $2! = 2$ para tener en cuenta estas posibles permutaciones entre las clases que encontramos antes.

Respuesta al ejercicio 30 item i)

El número de relaciones de equivalencia posibles (o de particiones de $2n$ elementos en 2 clases de n elementos) es:

$$\frac{1}{2!}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{2(n!)^2}$$

Comprobación

Si $n = 4$

$$\frac{1}{2!}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2}\binom{4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Las correspondientes particiones son

$$P_1 = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$$

$$P_2 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$$

$$P_3 = \{\{1,4\},\{2,3\}\}$$

Contar particiones

Supongamos que tenemos un conjunto de N elementos y que

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$$

donde $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathbb{N}$.

El problema de las cajas (repartir de acuerdo a una distribución dada)

Dado un conjunto A con $\#(A) = N$, queremos encontrar cuantas particiones

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

con los A_j disjuntos dos a dos y

$$\#(A_j) = N_j \ \forall j$$

donde importa el orden de los conjuntos A_k.

También podemos pensarlo así: Tenemos N objetos y queremos repartirlos en cajas de modo que haya N_k objetos en la caja k-ésima. ¿De cuántos modos podemos hacerlo? Notar que las cajas son distinguibles.

Solución del problema de las cajas con $k = 3$

Pensemos primero el caso $k = 3$. Queremos contar las particiones

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

con $\#(A_k) = N_k$ y $N_1 + N_2 + N_3 = N$.

Hay $\binom{N}{N_1}$ maneras de elegir los elementos del conjunto A_1. Y una vez que hicimos eso, hay $\binom{N-N_1}{N_2}$ de elegir los elementos del conjunto A_2 y entonces A_3 quedará determinado. Luego la cantidad total de posibilidades será

$$\begin{aligned}\binom{N}{N_1} \cdot \binom{N-N_1}{N_2} &= \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} \cdot \frac{(N-N_1)!}{N_2!(N-N_1-N_2)!} \\ &= \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!} \\ &= \binom{N}{N_1, N_2, N_3}\end{aligned}$$

Vemos que nos aparecen los coeficientes multinomiales del desarrollo

$$(x_1 + x_2 + x_3)^N = \sum_{N_1+N_2+N_3=N} \binom{N}{N_1 N_2 N_3} x^{N_1} x^{N_2} x^{N_3}$$

Recordamos el teorema multinomial

Teorema

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^N = \sum_{\substack{0 \leq N_1, N_2, \ldots, N_k \leq N \\ N_1 + N_2 + \ldots + N_k = N}} \binom{n}{N_1,\ N_2, \ldots N_k} x_1^{N_1} x_2^{N_2} \cdots x_k^{N_k}$$

donde los coeficientes multinomiales son

$$\binom{N}{N_1,\ N_2,\ N_k} = \frac{N!}{N_1! \cdot N_2! \cdots N_k!}$$

Ejemplo: usando SageMath calculé

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + 3\,x_1^2 x_2 + 3\,x_1 x_2^2 + x_2^3 + 3\,x_1^2 x_3 + 6\,x_1 x_2 x_3 + 3\,x_2^2 x_3 + 3\,x_1 x_3^2 + 3\,x_2 x_3^2 + x_3^3$$

$$\binom{3}{0,\ 2,\ 1} = \frac{3!}{0! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3, \quad \binom{3}{1,\ 1,\ 1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6}{1} = 6$$

Observación

Si $k = 2$, $N_1 + N_2 = N$,

$$\binom{N}{N_1, N_2} = \frac{N!}{N_1!N_2!} = \frac{N!}{N_1!(N - N_1)!} = \binom{N}{N_1}$$

Solución del problema de las cajas en general

El razonamiento anterior puede generalizarse para resolver el problema de las cajas en general.

Teorema

Sean $N, N_1, N_2, \ldots N_k \in N$ *con*

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_k$$

El número de particiones de un conjunto A *,*

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$$

con los A_j *disjuntos dos a dos y*

$$\#(A_k) = N_k \text{ para todo } j$$

donde importa el orden de los conjuntos A_k*, está dado por el coeficiente multinomial*

$$\binom{N}{N_1, N_2, \ldots, N_k} = \frac{N!}{N_1! N_2! \ldots N_k!}$$

Finalmente respondamos el problema de la práctica

Enunciado

- Sea A un conjunto con $3n$ elementos. ¿Cuántas particiones de A podemos armar que tengan 3 clases con n elementos cada una?

Tomamos $N = 3n$ y $N_1 = N_2 = N_3 = n$. Entonces la solución del problema de las cajas es:

$$\binom{3n}{n,\ n,\ n} = \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

Pero como vimos antes, distintas distribuciones en cajas pueden determinar la misma partición (y por ende la misma relación de equivalencia) si una resulta de la otra mediante una permutación de las cajas.
Debemos pues dividir por $P_3 = 3!$

Respuesta al ejercicio 30 item ii)

$$\frac{1}{3!}\binom{3n}{n,\ n,\ n} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

Ejemplo

Sea $n = 3$ $N = 6$, $N_1 = N_2 = N_3 = 2$. Respuesta $\frac{1}{6} \times \frac{720}{8} = 15$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$$

$$P_2 = \{\{1, 2\}, \{5, 6\}, \{3, 4\}\}$$

$$P_3 = \{\{3, 4\}, \{1, 2\}, \{5, 6\}\}$$

$$P_4 = \{\{3, 4\}, \{5, 6\}, \{1, 2\}\}$$

$$P_5 = \{\{5, 6\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$$

$$P_6 = \{\{5, 6\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}\}$$

Son la misma partición. Para no contarla 6 veces es que dividimos por $3! = 6$.