El binomio de Newton

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2020

Parte I

El binomio de Newton

Introducción

En esta clase, explicaremos el binomio de Newton y haremos una demostración por inducción (diferente a la que está en el apunte).

Recordamos que los números combinatorios $\binom{n}{k}$ cuentan cuántos subconjuntos de k elementos podemos formar a partir de uno de n elementos.

En particular, vamos a usar en esta clase la definición recursiva de los números combinatorios

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq k \leq n-1$$

[ver la proposición 3.3.3 en el apunte de la profesora Krick]

El Triangulo de Pascal

El Triangulo de Pascal (2)

El binomio de Newton: casos $n = 2$ y $n = 3$

El binomio de Newton es una fórmula para calcular una potencia de una suma de dos términos (binomio).

$$(x + y)^n$$

Empecemos con los primeros valore de n:

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y \quad = x^2 + 2xy + y^2$$

$$\begin{aligned}(x + y)^3 &= (x + y)^2 \cdot (x + y) = (x^2 + 2xy + y^2) \cdot (x + y)\\ &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3\end{aligned}$$

Bonus track: ¿Y en general? ...

Este proceso puede continuar para los siguientes valores de n. Pero vamos a hacerlo mediante un programa en Ptyhon 3 usando Sagemath

Programita para generar las potencias del binomio usando SageMath

```
var("x")
var("y")
b=x+y
Newton = 1
for n in range(1,8):
    Newton= expand(Newton * b)
    print("(x+y)^"+str(n)+"&=",latex(Newton),"\\\\")
```

Pueden descargar Sagemath en https://www.sagemath.org/

¿Y en general? ...

Salida del programa

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5 \\
(x+y)^6 &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6 \\
(x+y)^7 &= x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7
\end{aligned}$$

vemos que ¡aparecen como coeficientes los números combinatorios!

El teorema del binomio de Newton

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{N}$, y x, y números reales (o complejos)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Debido a este teorema, los números combinatorios se llaman también coeficientes binomiales.

Aunque es común atribuir a este teorema de Newton, ya aparece en los trabajos del matemático persa Al-Karaji del siglo 10 (vean `https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_theorem#History`).

Haremos una demostración por inducción en n.

Llamamos $P(n)$ a la afirmación que queremos demostrar.

Parte II

Demostración del binomio de Newton por inducción

El caso base $P(1)$

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0$$

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

$$(x+y)^1 = x + y$$

Paso inductivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y) = [\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}] \cdot (x+y)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 + \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Paso inductivo (2):Un cambio de índice

En la primera suma hacemos el cambio de índice $k = j - 1$, o sea $j = k + 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{j} y^{n-(j-1)}$$

Lo que también podemos escribir como

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{k} y^{n+1-k}$$

ya que la segunda suma es la misma si a la variable la volvemos a llamar k en lugar de j.

Paso inductivo (3):Juntamos las sumas

Sustituyendo nos queda:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0$$

$$+ \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}$$

Pero ¡ahora podemos juntar las dos sumatorias en una!

$$\begin{aligned}(x+y)^{n+1} = {} & \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\ & + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} \\ & + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0\end{aligned}$$

Paso inductivo (4): Conclusión

Usamos entonces la recurrencia para los números combinatorios. Nos queda:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} = & \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\
& + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} \\
& + \binom{n}{n} x^{n+1} y^0
\end{aligned}
$$

Pero como

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \quad \wedge \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Podemos escribir todo en una sumatoria:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}$$

y esto es exactamente la afirmación $P(n+1)$. Por el principio de inducción matemática, esto demuestra la afirmación $P(n)$, para todo n natural.

Parte III

Una aplicación

Una identidad con números combinatorios

El binomio de Newton es útil para probar distintas identidades que cumplen los números combinatorios. Algunos ejemplos aparecen en los ejercicios 25 y 26 de la práctica 3. Veamos una como ejemplo:

Teorema (Identidad de Vandermonde)

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$$

En particular si tomamos $n = m = r$, como

$$\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$$

nos queda:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

que es la identidad del ejercicio 25, item iv de la práctica 3.

Definiciones sobre polinomios

Para la demostración necesitamos algunas definiciones sobre polinomios (tema que desarrollaremos más adelante, en la práctica 7).

- Un polinomio en una variable (o indeterminada) x es una expresión de la forma

  $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$$

  donde los a_k son ciertos coeficientes. Si $a_n \neq 0$, decimos que P tiene grado n. Por ejemplo,

  $$P = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

  es un polinomio de grado n.
- Dados dos polinomios

  $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k, Q = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k$$

  $$P = Q \Leftrightarrow \forall k : a_k = b_k$$

¿Cómo se multiplican polinomios?

Consideremos dos polinomios,

$$P = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j, \quad Q = \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot x^k$$

El producto entre ellos se define usando la propiedad distributiva

$$P \cdot Q = \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_j \cdot b_k x^j x^k$$

Si agrupamos los términos que tienen el mismo exponente $j + k = r$, nos queda

$$P \cdot Q = \sum_{r=0}^{n+m} c_r x^r$$

donde

$$c_r = \sum_{\substack{0 \le j \le m, 0 \le k \le n \\ j+k=r}} a_j \cdot b_k = \sum_{j=0}^{r} a_j \cdot b_{r-j}$$

Prueba de la identidad de Vandermonde

En particular, si elegimos $P = (1+x)^m$, $Q = (1+x)^n$ tendremos

$$a_j = \binom{m}{j}, \quad b_k = \binom{n}{k}$$

por el binomio de Newton, pero

$$P \cdot Q = (1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$$

entonces usando de nuevo el binomio de Newton

$$c_r = \binom{n+m}{r}$$

y reemplazando en la fórmula para los coeficientes c_r de $P \cdot Q$ obtenmos la identidad de Vandermonde

$$c_r = \sum_{j=0}^{r} a_j \cdot b_{r-j} = \sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \cdot \binom{n}{r-j}$$

Parte IV

Algunas variaciones sobre el tema

Bonus track 2: ¿Y entonces Newton qué hizo? ...

En los cursos de análisis, se ve el (verdadero) teorema del binomio de Newton, donde el exponente puede ser un número real cualquiera.

Teorema

Para todo α real, y x real con $|x| < 1$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

donde los coeficientes binomiales generalizados se definen por

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Para más información (y ejemplos), pueden ver
https://en.wikipedia.org/wiki/Binomial_series.

Bonus track 3: Otra fórmula donde aparecen los combinatorios

Como ejercicio, pueden intentar escribir una prueba por inducción del siguiente teorema (imitando la que hicimos):

Fórmula de Leibniz para la derivada n-ésima de un producto

Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones n veces derivables en un entorno de $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \, f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$$

Ejemplo: $h(x) = x^4 e^x$. Elijo $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^4$

$$\begin{aligned} h^{(4)} &= \binom{4}{0} e^x x^4 + \binom{4}{1} e^x 4x^3 + \binom{4}{2} e^x 12x^2 + \binom{4}{3} e^x 24x + \binom{4}{4} e^x 24 \\ &= \left(x^4 + 16\,x^3 + 72\,x^2 + 96\,x + 24\right)\, e^x \end{aligned}$$

Bonus track 4: Potencias de sumas en con más términos

Teorema

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \le j_1, j_2, \ldots, j_k \le n \\ j_1 + j_2 + \ldots + j_k = n}} \binom{n}{j_1 \; j_2 \; j_k} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_k^{j_k}$$

donde los coeficientes multinomiales son

$$\binom{n}{j_1 \; j_2 \; j_k} = \frac{n!}{j_1! \cdot j_2! \cdots j_k!}$$

Ejemplo: usando SageMath calculé

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + 3\,x_1^2 x_2 + 3\,x_1 x_2^2 + x_2^3 + 3\,x_1^2 x_3 + 6\,x_1 x_2 x_3 + 3\,x_2^2 x_3 + 3\,x_1 x_3^2 + 3\,x_2 x_3^2 + x_3^3$$

$$\binom{3}{0 \; 2 \; 1} = \frac{3!}{0! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3, \quad \binom{3}{1 \; 1 \; 1} = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{6}{1} = 6$$