Algunos Ejercicios

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Segundo cuatrimestre de 2020

Parte I

Sucesiones de Lucas (recurrencia lineal)

Un ejercicio similar al ejercicio 21 de la práctica 2

Enunciado

Hallar una fórmula para el término general de las sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida a continuación y probar su validez.

$$a_0 = 12, a_1 = 31$$

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad n \geq 1$$

En la sección 2.5.3 del apunte se presenta un método general para encontrar fórmulas explícitas para el término general de una sucesión definida por medio de una recurrencia lineal. Este método generaliza el ejemplo que vimos antes de la sucesión de Fibonacci.

Un método general

Idea del método: le asociamos a la recurrencia

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \Leftrightarrow a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$$

la ecuación cuadrática

$$P(X) = X^2 - 5X + 6 = 0$$

Entonces si r y $\overline{r}$ son las raíces de P las sucesiones $b_n = r^n$, $c_n = \overline{r}^n$ van a satisfacer la misma recurrencia

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0$$

$$c_{n+2} - 5c_{n+1} + 6c_n = 0$$

y entonces

$$\gamma_n = \alpha \cdot r^n + \beta \cdot \overline{r}^n$$

con α, β dados también.

$$\gamma_{n+2} - 5\gamma_{n+1} + 6\gamma_n = 0$$

Ahora podemos elegir α, β de modo que $\gamma_0 = a_0, \gamma_1 = a_1$ y probar por inducción que $a_n = \gamma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

En nuestro ejemplo

En nuestro ejemplo las raíces son $r = 2$ y $\bar{r} = 3$ pues

$$P(X) = X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$$

Entonces la solución será de la forma

$$a_n = \alpha \cdot 2^n + \beta \cdot 3^n$$

Las condiciones iniciales

$$a_0 = 5, a_1 = 31$$

dan origen a las ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha + \beta & = & 12 \\ 2\alpha + 3\beta & = & 31 \end{cases}$$

Luego $\alpha = 5$ y $\beta = 7$.

¿Y si hay raices múltiples?

Enunciado

Hallar una fórmula explícita para...

$$a_0 = 12, a_1 = 31$$

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n, \quad n \geq 1$$

En este caso el polinomio asociado sería

$$P(X) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$

que tiene una raíz múltiple $r = \overline{r} = 3$. En este caso, la solución hay que buscarla en la forma

$$a_n = \alpha \cdot r^n + \beta \cdot n \cdot r^{n-1}$$

En nuestro ejemplo,

$$a_n = \alpha \cdot 3^n + \beta \cdot n 3^{n-1}$$

Y usando las condiciones iniciales

$$\begin{cases} \alpha \cdot 3^0 + \beta \cdot 0 \cdot 3^{-1} & = \alpha & = 12 \\ \alpha \cdot 3^1 + \beta 1 \cdot 3^0 & = 3\alpha + \beta & = 31 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 12, \beta = -5$$

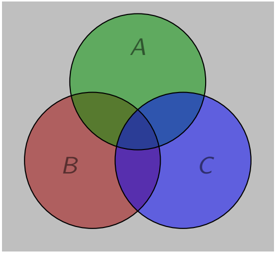
Parte II

Inclusiones y exclusiones

Un ejercicio de la práctica 3

En la clase anterior, vimos que si A y B son dos conjuntos finitos

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$



Ejercicio 3 de la práctica 3

Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V , calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.

Solución del ejercicio

Como

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$$

Entonces usando el caso de 2 conjuntos

$$\#(A \cup B \cup C) = \#((A \cup B) \cup C) = \#(A \cup B) + \#(C) - \#((A \cup B) \cap C)$$

Pero usando la propiedad distributiva esto es

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

y entonces de nuevo por el caso de 2 conjuntos

$$\#((A \cup B) \cap C) = \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C)$$

ya que

$$(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$

Sustituyendo encontramos que

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A) + \#(B) + \#(C) - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

Teorema (Fórmula de inclusiones y exclusiones)

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$ conjuntos finitos. Entonces

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left\{ \sum \#(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \right\}$$

donde para cada k, la segunda suma recorre las $\binom{n}{k}$ formas de elegir k conjuntos entre los (A_i).

Observación: Hay entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

términos en total en la suma del segundo miembro.

La demostración se hace por inducción en n.