Combinatoria

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

Parte I

Formalizando algunas cosas que sabemos desde la escuela primaria

¿Cómo reconocer que dos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos?

Definición

Decimos que dos conjuntos A y B son coordinables si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Notación: $A \sim B$.

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{a, b, c\}$ son coordinables por medio de la función $f(1) = a$, $f(2) = b$ y $f(3) = c$.

Notamos que $\sim$ es una relación de equivalencia entre los conjuntos.

- Es reflexiva: pues $\mathrm{Id}_A : A \to A$ es biyectiva. Luego $A \sim A$.
- Es simétrica porque si $A \sim B \Rightarrow$ existe $f : A \to B$ es biyectiva. Pero entonces $f^{-1} : B \to A$ también lo es. Luego $B \sim A$.
- Es transitiva: Porque si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces existen $f : A \to B$ y $g : B \to C$ biyectivas. Pero entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva [ya que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$] Luego $A \sim C$.

Contando la cantidad de elementos de un conjunto

Notamos por $\#(A)$ el cardinal o cantidad de elementos de un conjunto A. Formalmente esto podría definirse como sigue:

Definición

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, consideramos la sección incial de los números naturales

$$I_0 = \emptyset, \quad I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} : m \leq n\}$$

.

Decimos que un conjunto A es finito si es coordinable con alguna sección inicial de los números naturales I_n. En este caso decimos que A tiene n elementos y escribimos

$$\#(A) = n$$

Notamos que $\emptyset$ es finito y $\#(\emptyset) = 0$.
En caso contrario, decimos que A es infinito.

- Esta definición es correcta porque $I_n \sim I_m \Leftrightarrow n = m$.
- Si $A \sim B$ y A es finito, entonces B es finito y $\#(A) = \#(B)$

Cosas que uno aprende en la escuela primaria

Teorema (Número de elementos en una unión de conjuntos)

Si A y B son finitos, $A \cup B$ es finito y

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$$

En particular si A y B son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$),

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$$

Ejemplo: $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{5\}$ entonces $\#(A) = 4, \#(B) = 3$, $\#(A \cup B) = 7, \#(A \cap B) = 1$.

Teorema (Número de elementos en una diferencia de conjuntos)

Si B es finito y $A \subseteq B$, entonces A es finito y $\#(A) \leq \#(B)$.

$$\#(B - A) = \#(B) - \#(A)$$

Cosas que uno aprende en la escuela primaria(2)

Teorema (Número de elementos de un producto cartesiano, proposición 3.1.4 del apunte)

Si A y B son finitos, $A \times B$ es finito y

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$$

En particular si

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A \;(n \text{ veces}) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A\}$$

entonces

$$\#(A^n) = \#(A)^n$$

Ejemplo : $A = \{1, 2, 3\},\; B = \{a, b\}, \#(A) = 2, \#(B) = 3$

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, c)\}, \#(A \times B) = 6$$

Parte II

Usando estas ideas para contar algunos objetos matemáticos

¿Cuántas funciones hay de A en B?

Teorema (Cantidad total de funcione entre dos conjuntos)

Si A y B son finitos,

$$\#\{funciones\ f : A \to B\} = \#(B)^{\#(A)}$$

Demostración: Sean $n = \#(A), m = \#(B)$ y escribamos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

A cada función $f : A \to B$ le podemos asociar la n-upla de elementos de B

$$(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$$

y recíprocamente cada una de estas n-úplas determina una función de A en B. Es una correspondencia biyectiva. Es decir que el conjunto que estamos tratando de contar es coordinable con B^n. En consecuencia, tiene m^n elementos.

¿Cuántas partes tiene un conjunto?

Teorema (Cantidad total de funcione entre dos conjuntos)

Dado un conjunto A, consideramos su conjunto de partes

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}.$$

Entonces si A es finito, $\mathcal{P}(A)$ es finito y

$$\#(\mathcal{P}(A)) = 2^{\#(A)}$$

Demostración: Sea $n = \#(A)$ y escribamos

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Consideremos $\mathcal{T} = \{V, F\}$ un conjunto de 2 elementos. A cada subconjunto $B \subseteq A$ le podemos asignar la la n-upla de elementos de $\mathcal{T}$

$$(t_1, t_2, \ldots, t_n) \text{ dada por } t_k = \begin{cases} V & \text{si} \quad a_k \in B \\ F & \text{si} \quad a_k \notin B \end{cases}$$

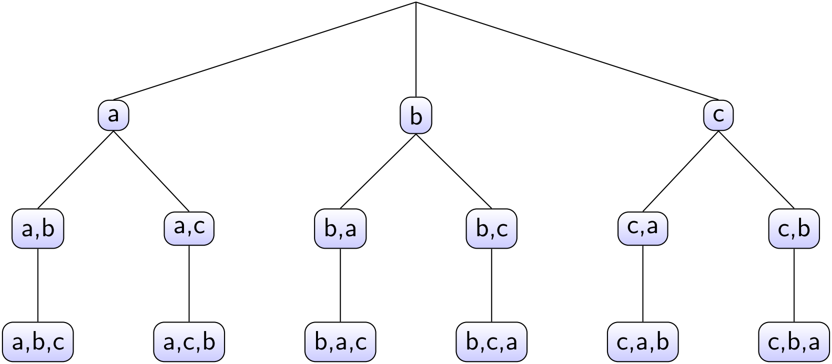
Entonces hay una biyección entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{T}^n$ con lo que $\#\mathcal{P}(A) = \#(\mathcal{T})^n = 2^n$.

Parte III

Permutaciones

Permutaciones de 3 elementos

¿De cuántas formas podemos ordenar 3 personas $a = Aldo$, $b = Blanca$, $c = Carlos$ en una fila?



$\#$ Permutaciones de 3 elementos $\{a, b, c\} = 3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

Otra manera de pensar las permutaciones de 3 elementos

Notemos que cada manera de ordenar las personas como b, c, a puede pensarse como una función biyectiva del conjunto $I_3 = \{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c\}$ (que dice qué persona pusimos en cada lugar de la fila)

$$f(1) = b$$

$$f(2) = c$$

$$f(3) = a$$

Luego 3! también es el número de funciones biyectivas de un conjunto de 3 elementos en otro de 3 elementos.

Notamos que esta cantidad de funciones no depende de la naturaleza de los objetos que estemos considerando.

Permutaciones en general

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. El número de permutaciones P_n de n objetos es el número de funciones biyectivas $f : A \to B$ cuando A y B son dos conjuntos cualesquiera con n elementos. Por ejemplo, podemos tomar $A = B$ o incluso $A = B = I_n$.

Teorema

Si $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$$

Por ejemplo, ¿de cuántas maneras pueden ser ordenadas 5 personas en el orden de mérito de un concurso? (suponiendo que nadie queda afuera del concurso)
Rta: $5! = 120$.

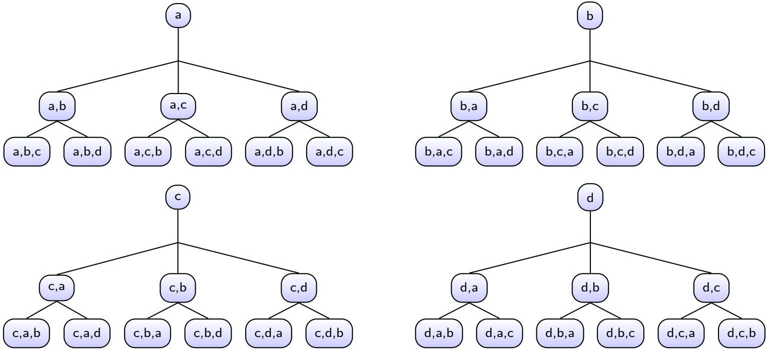
Notar que si $n = 0$, $A = B = \emptyset$ y hay una única función $f : \emptyset \to \emptyset$ (la función vacía). Entonces $P_0 = 1$ por lo que la definición $0! = 1$ hace que el teorema sea cierto también en este caso.

Parte IV

Variaciones

Una variación del problema anterior

Supongamos ahora que tenemos 4 personas en un concurso $a = Aldo$, $b = Blanca$, $c = Carlos$ $d = Diana$ y tenemos que elegir una terna donde importa el orden en que los ponemos. ¿De cuántas formas diferentes podemos hacerlo?



Esto se conoce como el número de variaciones (sin repetición) de un conjunto de 4 elementos tomandos en tuplas de 3 elementos

$$V_3^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Otra manera de pensar las variaciones

Notemos que cada posible terna de personas como b, c, a puede pensarse ahora como una función inyectiva del conjunto $I_3 = \{1, 2, 3\}$ en $\{a, b, c, d\}$ (que dice qué persona pusimos en cada lugar de la fila)

$$f(1) = b$$

$$f(2) = c$$

$$f(3) = a$$

Variaciones en general

En general, el número de variaciones V_k^n cuenta de cuántas maneras podemos elegir k objetos de un conjunto de n objetos donde importa en qué orden los tomamos (aquí $k \leq n$).

Formalmente, esto puede expresarse diciendo que V_k^n es el número de funciones inyectivas $f : A \to B$ donde A tiene k elementos y B tiene n elementos. [ver proposición 3.2.2 del apunte].

Generalizando el razonamiento anterior vemos que está dado por:

$$V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \prod_{j=1}^{k} (n-j+1)$$

También podemos escribirlo como

$$V_k^n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1)(n-k)(n-k-1) \cdots 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Parte V

Combinaciones

¿Y si no tenemos en cuenta el orden?

Volvamos al problema anterior, donde teníamos cuatro personas a, b, c, d y queríamos escoger una terna. Pero supongamos que ahora no importa el orden en que las elegimos. ¿Cuántas elecciones posibles tenemos?

Una manera de pensarlo es la siguiente: En el conjunto de ternas que obtuvimos antes, definimos una relación de equivalencia diciendo que dos ternas son equivlentes si una se obtiene de la otra permutando los elementos, Sabemos que esta relación va a partir el conjunto de ternas en clases de equivalencia. Por ejemplo la clase de equivalencia de la terna a, b, c está formada por las ternas

$$a, b, c \quad a, c, b \quad b, a, c \quad b, c, a \quad c, b, a \quad c, a, b$$

Cualquiera de ellas representa la misma elección de pesonas si no se tiene en cuenta el orden. Notemos que cada clase tiene $3! = 6$ elementos.

Como hay 24 ternas, y cada clase de equivalencia tiene 6 ternas tendremos en total

$$C_3^4 = \binom{4}{3} = \frac{V_3^4}{3!} = \frac{24}{6} = 4$$

Combinaciones - Números combinatorios

En general, podemos considerar el número de combinaciones $C_k^n = \binom{n}{k}$ que cuenta cuántas elecciones podemos hacer de k elementos a partir de un conjunto de n elementos sin tener en cuenta el orden. O expresado en otras palabras: ¿cuántos subconjuntos de k elementos podemos obtener a partir de uno de n?.

$$\mathcal{P}_k(A) = \{B \subseteq A : \#(B) = k\} \Rightarrow \binom{n}{k} = \#\mathcal{P}_k(A) \text{ con } n = \#(A)$$

Generalizando el razonamiento anterior, se ve que:

$$\binom{n}{k} = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

[Fórmula de la proposición 3.2.2 del apunte, aunque allí se prueba de otra forma.]

También se lo conoce como número combinatorio.

Recurrencias para los números combinatorios

Definición recursiva de los números combinatorios

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad 1 \leq k \leq n-1$$

En el apunte se prueba esto a partir de la interpretación combinatoria de $\binom{n}{k}$ [proposición 3.3.3] y se deduce entonces la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

por inducción [teorema 3.3.4]. También se puede seguir el camino inverso: deducir primero esta fórmula de la interpretación combinatoria (como hicimos) y a partir de ella la recurrencia haciendo cuentitas.

El Triangulo de Pascal

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

$$\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}$$

El Triangulo de Pascal (2)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Números combinatorios complementarios

Números combinatorios complementarios

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

Hay dos maneras de pensarla:

- Interpretación combinatoria: Hay tantos subconjuntos de $n-k$ elementos en uno de n elementos, como suboconjuntos de k elementos.
  Si A tiene n elementos, y $B \subseteq A$, entonces B tiene k elementos sí y sólo si $A - B$ tiene $n-k$. Esto establece una biyeccción entre $\mathcal{P}_k(A)$ y $\mathcal{P}_{n-k}(A)$
- También es inmediata a partir de la fórmula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

Suma de todos los combinatorios para un n fijo

Suma de todos los combinatorios para un n fijo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

- Interpretación combinatoria: La suma cuenta cuándos subconjuntos se pueden formar con un conjunto de n elementos ya que

$$\mathcal{P}(A) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(A) \text{ unión disjunta}$$

Parte VI

Un ejemplo de desigualdad por inducción

Un ejercicio de final (que me tomaron a mí)

Enunciado

Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

Idea clave: consideramos la sucesión

$$a_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Veamos qué recurrencia satiface:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} = \frac{[2n+2)]!}{[(n+1)!]^2} = \frac{[2n)]!(2n+1)(2n+2)}{[n!(n+1)]^2} \\ &= \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = a_n \cdot \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Un ejercicio de final (2)

Como en las clases anteriores, llamamos $P(n)$ a la afirmación del enunciado $2^n \leq a_n \leq 4^n$.

- caso base: Probamos $P(1)$. Si $n = 1$, $a_1 = \binom{2}{1} = 2, 2^1 = 2 \leq a_1 \leq 4^1 = 4$ ✓
- observación clave para el paso inductivo: Sea

$$b_n := \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}$$

de modo que $a_{n+1} = a_n \cdot b_n$. Afirmo que

$$2 \leq b_n \leq 4$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 2 \leq b_n &\Leftrightarrow 2(n^2+2n+1) \leq 4n^2+6n+2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 2n^2+2n \checkmark \end{aligned}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} b_n \leq 4 &\Leftrightarrow 4(n^2+2n+1) \leq 4n^2+6n+2 \\ &\Leftrightarrow 2n+2 \geq 0 \checkmark \end{aligned}$$

Un ejercicio de final (3)

- Paso inductivo : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
  Por hipótesis inductiva
  $$2^n \leq a_n \leq 4^n$$
  y probamos que
  $$2 \leq b_n \leq 4$$
  Se deduce que
  $$2^n \cdot 2 \leq a_n \cdot b_n \leq 4 \cdot 4^n$$
  pero
  $$a_{n+1} = a_n \cdot b_n$$
  por la recurrencia que encontramos. Luego
  $$2^{n+1} \leq a_{n+1} \leq 4^{n+1}$$
  que es $P(n+1)$.

Por el principio de inducción matemática, $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.