Más sobre Inducción

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Primer cuatrimestre de 2020

Parte I

Sumatorias telescópicas

Introducción - Sumatorias telescópicas

En la clase de hoy vamos, seguiremos trabajando con sumatorias.

En clases anteriores, aprendimos a demostrar una fórmula para una sumatoria utilizando la inducción matemática. Sin embargo este método tiene una limitación intrínseca: debemos conocer (o conjeturar) de antemano qué fórmula queremos demostrar.

Por eso es interesante, desarrollar métodos para calcular sumatorias sin utilizar inducción. Hoy veremos uno de ellos: las sumatorias telescópicas. Se basa en considerar sumatorias de la forma:

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)]$$

donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$(o $\mathbb{C}$) es una función (¡es decir una sucesión!).

Desarrollando una suma telescópica

Si desarrollamos la suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = [f(2) - f(1)] + [f(3) - f(2)] + [f(4) - f(3)] + \ldots + [f(n) - f(n-1)] + [f(n+1) - f(n)]$$

Usando la propiedad asociativa, vemos que cada término se cancela con el anterior. Queda:

Suma telescópica - Ejercicio 10, práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$$

Prueba formal, por inducción.

La fórmula anterior se puede probar formalmente por inducción. Llamémosla $P(n)$.

- Caso base ($P(1)$):

$$\sum_{k=1}^{1} [f(k+1) - f(k)] = f(2) - f(1)$$

- Paso inductivo: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} [f(k+1) - f(k)] = \left\{ \sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] \right\} + [f(n+2) - f(n+1)]$$

y usando la hipótesis inductiva

$$= [f(n+1) - f(1)] + [f(n+2) - f(n+1)] = f(n+2) - f(1)$$

'

Usando el principio de inducción matemática, concluimos que la fórmula es cierta para todo n.

Aplicación I

Ahora veremos varias aplicaciones de nuestra fórmula. Comencemos eligiendo $f(k) = k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^2 - k^2] = (n+1)^2 - 1$$

Si desarrollamos el cuadrado del binomio usando la fórmula $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k^2 + 2k + 1) - k^2] = (n^2 + 2n + 1) - 1$$

o simplificando

$$\sum_{k=1}^{n} [2k+1] = n^2 + 2n$$

Ahora usamos las propiedades de linealidad de la sumatoria (ver clase anterior)

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^2 + 2n$$

Aplicación I (parte 2)

Pero

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

Nos queda:

$$2\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + n = n^2 + 2n$$

o despejando

Ejercicio 3 de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicación II

Para una segunda aplicación, elijamos $f(k) = k^3$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Nos queda

$$\sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3] = (n+1)^3 - 1$$

Nuevamente podemos desarrollar esta suma utilizando la fórmula del cubo de binomio

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Nos queda:

$$\sum_{k=1}^{n} [k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3] = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1$$

o sea: Nos queda:

$$\sum_{k=1}^{n} [3k^2 + 3k + 1] = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Aplicación II (continuación)

Usando como antes la linealidad de las sumatorias nos queda:

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\sum_{k=1}^{n} k\right] + \left[\sum_{k=1}^{n} 1\right] = n^3 + 3n^2 + 3n$$

o sea reemplazando la sumatoria que calculamos antes

$$3\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + 3\left[\frac{n^2+n}{2}\right] + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

Luego:

Ejercicio 7 i) de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$= \frac{n\,(n+1)](2\,n+1)}{6}$$

Un ejercicio para ustedes

Análogamente utilizando la función $f(k) = k^4$ en la suma telescópica, y la fórmula de la potencia cuarta del binomio

$$(x+y)^4 = x^4 + 4\,x^3y + 6\,x^2y^2 + 4\,xy^3 + y^4$$

Ustedes pueden demostrar la fórmula del

Ejercicio 7 ii) de la práctica 2

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Generalización

En general las potencias del binomio pueden desarrollarse mediante la fórmula del binomio de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

que aparece en la sección 3.3.3 del apunte de la profesora Krick. Los coeficientes son los números combinatorios

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esto veremos en la unidad siguiente. Usando esto podrían calcular recursivamente las sumas

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

con $p \in \mathbb{N}$ y demostrar (¡por inducción!) que pueden expresarse como un polinomio en n de grado $p+1$ con coeficientes racionales.'

Aplicación III: suma geométrica

En la fórmula de la suma telescópica el índice puede comenzar en cero:

$$\sum_{k=0}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(0)$$

Elijamos $f(k) = a^k$ donde $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Nos queda:

$$\sum_{k=0}^{n} [a^{k+1} - a^k] = a^{n+1} - 1$$

Sacando factor común a^k primero y $a - 1$ despueś, podemos escribir esto como

$$\sum_{k=0}^{n} a^k[a-1] = [a-1]\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1$$

Ejercicio 9 de la práctica 2

$$\text{Si } a \neq 1, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Conclusión

En la clase hoy vimos que la fórmula de la suma telescópica

Suma telescópica

$$\sum_{k=1}^{n} [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1)$$

es muy útil para obtener expresiones explícitas de sumatorias.

En el ejercicio 10 items ii) y iii) de la práctica aparecen otras aplicaciones.

Parte II

Inducción completa

La forma fuerte del principio de inducción

Principio de Inducción completa, teorema 2.5.7 del apunte

Sea $P(n)$ es una propiedad (función proposicional) de los números naturales. Supongamos que

- Caso base: $P(1)$ es verdadera.
- Paso inductivo Para todo $n \in \mathbb{N}$, si $P(m)$ es verdadera para $1 \leq m \leq n$, entonces $P(n+1)$ es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$P(1) \wedge \{\forall n\,[[\forall m \leq n : P(m)] \Rightarrow P(n+1)]\} \Rightarrow [\forall n : P(n)]$$

Aunque aparentemente es más fuerte que la versión del principio de inducción que vimos en las clases anteriores, en realidad es equivalente.
Idea de la prueba: le aplicamos el principio de inducción a la proposición $Q(n)$ dada por $\forall m \leq n : P(m)$.

Los números de Fibonacci

Los números de Fibonacci son un ejemplo de una sucesión definida por recurrencia. Están definidos en la sección 2.5.2 del apunte de la materia (de la profesora Teresa Krick), por medio de la recurrencia

$$\begin{cases} F_0 & = & 0 \\ F_1 & = & 1 \\ F_{n+2} & = & F_n + F_{n+1} \text{ (para todo } n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Sus primeros términos son:

$$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21$$

$$F_9 = 34, F_{10} = 55, F_{11} = 89, F_{12} = 144, F_{13} = 233, F_{14} = 377, F_{15} = 610$$

El principio de inducción completa implica que F_n queda bien definida para todo n.

Un ejemplo: la fórmula no recursiva para los números de Fibonacci

Consideramos la ecuación cuadrática:

$$X^2 - X - 1 = 0$$

sus raíces son

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{número de oro}, \quad \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Por definición

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0 \Rightarrow \Phi^2 = 1 + \Phi$$

La misma propiedad cumple $\overline{\Phi}$,

$$\overline{\Phi}^2 = 1 + \overline{\Phi}$$

Proposición

2.5.5 en el apunte Para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \overline{\Phi}^n \right)$$

Idea de la prueba

Consideramos la sucesión $G_n = \Phi^n$ veamos que cumple la misma recurrencia que los números de Fibonacci pero con otras condiciones iniciales $G_0 = 1, G_1 = \phi$. De hecho, usando la ecuación cuadrática que cumple Φ, tenemos:

$$G_n + G_{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n+1} = \Phi^n(1+\Phi) = \Phi^n \cdot \Phi^2 = \Phi^{n+2} = G_{n+2}$$

Similarmente como $\overline{\Phi}$ cumple la misma ecuación cuadrática que Φ, deducimos que si $H_n = \overline{\Phi}^n$,

$$H_n + H_{n+1} = H_{n+2}$$

pero ahora las condiciones iniciales son $H_0 = 1$ y $H_1 = \overline{\Phi}$.
Consideramos entonces la sucesión

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(G_n - H_n)$$

Por ser una combinación lineal de G_n y H_n, también verificará que

$$S_n + S_{n+1} = S_{n+2}$$

Nuestro teorema afirma que para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$F_n = S_n$$

Idea de la prueba

- Caso base: Si $n = 0$, $H_0 = G_0 = 1$, luego

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(G_0 - H_0) = 0 = F_0 \checkmark$$

- Paso inductivo: Suponiendo que el teorema es cierto para todo $m \in \mathbb{N}_0$ con $m \leq n$, queremos probar que vale para n. Si $n = 1$, lo probamos directamente,

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(G_1 - H_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi - \overline{\Phi}\right) = 1 = F_1 \checkmark$$

Si $n > 1$, como suponemos que es válido para todo $m \leq n$, en particular vale para n y para $n - 1$,

$$S_n = F_n \wedge S_{n-1} = F_{n-1}$$

pero entonces

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} = S_n + S_{n-1} = S_{n+1} \checkmark$$

Usando el principio de inducción completa concluimos que

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : F_n = S_n$$

Parte III

El principio del mínimo entero

El principio del mínimo entero

Definición

Si $C \subset \mathbb{N}$ es un conjunto no vacío, c_0 se dice el elemento mínimo de C si cumple dos condiciones:

- $c_0 \in C$
- *Para todo $c \in C$, $c_0 \leq c$.*

El principio del mínimo entero

Si $C \subset \mathbb{N}$ es un conjunto no vacío, entonces tiene un elemento mínimo

Este enunciado es equivalente al principio de inducción.

Irracionalidad de $\sqrt{2}$

Teorema

No existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$.

Si existieran, por el principio del mínimo entero habría una solución con un b mínimo. Consideramos esa solución (a, b). Como $a^2 = 2b^2$, a^2 es par y por lo tanto a es par, luego

$$a = 2\tilde{a} \text{ con } \tilde{a} \in \mathbb{N}$$

Luego

$$a^2 = 4\tilde{a}^2 \Rightarrow 4\tilde{a}^2 = 2b^2 \Rightarrow 2\tilde{a}^2 = b^2$$

Pero entonces b^2 también es par $\Rightarrow$ b es par y podemos escribir

$$b = 2\tilde{b} \text{ con } \tilde{b} \in \mathbb{N}$$

$$b^2 = 4\tilde{b}^2 \Rightarrow 2\tilde{a}^2 = 4\tilde{b}^2 \Rightarrow \tilde{a}^2 = 2\tilde{b}^2$$

Pero entonces econtramos otra solución $(\tilde{a}, \tilde{b})$ con $\tilde{b} < b$ ¡absurdo!.

Equivalencia entre el principio de inducción completa y el del mínimo entero

1 Inducción completa $\Rightarrow$ Mínimo Entero: Consideramos la propiedad

$$P(n) : \forall C \subseteq \mathbb{N}\, [n \in C \Rightarrow C \text{ tiene un elemento mínimo}]$$

- caso base Verificamos $P(1)$. Si $n = 1$, es verdadera pues $\min(C) = 1$.
- paso inductivo Vemos que $\forall m < n : P(m) \Rightarrow P(n)$. Sea pues $n > 1$. Distinguimos dos casos:
  - Si para todo $m < n$, $m \notin C$ entonces n es el mínimo de C.
  - En otro caso existe $m < n$ tal que $m \in C$ y el resultado se sigue de la hipótesis inductiva.

Por el principio de inducción completa, concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo n.

$$C \subseteq \mathbb{N} \wedge C \neq \emptyset \Rightarrow \exists n : n \in C$$

concluimos que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un mínimo.

Equivalencia entre el principio de inducción completa y el del mínimo entero

2 Mínimo Entero $\Rightarrow$ Inducción completa: Supongamos que la propiedad $P(n)$ verifica la hipótesis del principio de inducción completa.

$$P(1) \wedge \{[\forall m < n : P(m)] \Rightarrow P(n)\}$$

Supongamos que $P(n)$ no fuera verdadera para todo n. Entonces el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \sim P(n)\}$$

es no vacío. Sea n_0 el mínimo de C (que existe por el principio del mínimo entero). $n_0 \neq 1$ porque $P(1)$ es verdadera. Ahora si $m < n$, $m \notin C$ sino n_0 no sería el mínimo. Es decir que $P(m)$ es verdadera para $m < n$. Entonces $P(n_0)$ también lo es (por el la hipótesis), con lo que $n_0 \notin C$. ¡absurdo! Concluimos que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Parte IV

Los Axiomas de Peano

Axiomas de Peano

Los números naturales se pueden definir axiomáticamente a partir de la función sucesor $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(n) = n + 1$ usando los axiomas propuestos por el matemático italiano Giuseppe Peano en 1889.

El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales satisface los siguientes axiomas:

Los Axiomas de Peano (versión de Edmund Landau)

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. Existe una función sucesor $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que:
   - $\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 1$ [o sea: 1 no está en la imagen de S]
   - $\forall n, m \in \mathbb{N} : S(n) = S(m) \Rightarrow n = m$. [o sea: S es inyectiva]
3. Principio de inducción completa Si $C \subseteq \mathbb{N}$ es un conjunto, $1 \in C$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ si $n \in C \Rightarrow S(n) \in C$ entonces $C = \mathbb{N}$.

Toda la aritmética de los naturales se puede desarrollar a partir de ellos.

Definiciones a partir de los Axiomas de Peano

Definición de la suma

$$\begin{aligned} a+1 &= S(a) \\ a+S(b) &= S(a+b) \end{aligned}$$

Definición del producto

$$\begin{aligned} a \cdot 1 &= a \\ a \cdot S(b) &= a \cdot b + a \end{aligned}$$

Definición del orden

$$a < b \Leftrightarrow \exists c : b = a + c$$

Referencia: El Concepto de Número Natural según Giuseppe Peano Julio Luque Arias http://funes.uniandes.edu.co/9114/1/Concepto2002Luque.pdf