Sumatorias y Productorias - Inducción

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - Sumatorias cuatrimestre de 2020

Parte I

Sumatorias y Productorias

Sucesiones

Comencemos recordando que una sucesión de números reales es una función $a : \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{R}$. También podríamos considerar sucesiones de números complejos $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$). $a_n = a(n)$ se denomina el n-ésimo término en la sucesión. Intuitivamente es como dar una lista infinita de números

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Algunos ejemplos:

1. La sucesión de los números naturales $a_n = n$
$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$
2. La sucesión de los números pares $a_n = 2n$
$$2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$$
3. La sucesión de los cuadrados $a_n = n^2$
$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots$$
4. La sucesión de los números primos
$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$$

Sumatorias

El símbolo de sumatoria $\sum$ proporciona una forma compacta y precisa de expresar sumas.
Dada una sucesión (a_k) el símbolo

$$\sum_{k=i}^{n} a_k$$

representa la suma de los términos de la sucesión (a_k) donde el índice (o variable) k varia entre el valor inicial i y el valor final n, es decir: $i \leq k \leq n$.
Por ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sum_{k=2}^{n} k^2 = 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

Productorias

De modo similar la las sumatorias, la productorias permiten expresar de forma compacta y precisa productos. El símbolo

$$\prod_{k=i}^{n} a_k$$

denota un producto de los elementos de la sucesión a_k donde k varía en el rango $i \leq k \leq n$.
Por ejemplo:

$$\prod_{k=1}^{n} a = a^n$$

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{factorial de } n$$

Bonus track: Sumatorias en Python

En Python 3 una sumatoria como

$$S_2(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

se escibe fácilmente usando la función predefinida sum

```
>>> def S2(n):
...     return sum([k**2 for k in range(1,n+1)])
...
>>> S2(3)
14
>>> [k**2 for k in range(1,4)]
[1, 4, 9]
>>> 1**2+2**2+3**2
14
```

Bonus track: Productorias en Python

Similarmente la productoria

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

que define el factorial se puede escribir usando la función predefinida sum

```
>>> from math import prod
>>> def factorial(n):
...     return prod([k for k  in range(1,n+1)])
...
>>> for n in range(1,6):
...     print("factorial(",n,")=",factorial(n))
...
factorial( 1 )= 1
factorial( 2 )= 2
factorial( 3 )= 6
factorial( 4 )= 24
factorial( 5 )= 120
```

Bonus track: Sumatorias mediante un ciclo

¡Pero no todos los lenguajes de programación tienen una función pre-definida para sumatorias!
Por eso es interesante ver otra forma de calcular las sumatorias, mediante un ciclo y una variable que acumule los resultados parciales.
Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la suma de los impares en un cierto rango

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

[ejercio 6 de la práctica 2]

Sumando mediante un ciclo en Python 3

```
def ej6(n):
 s=0
 for i in range (1,n+1):
        s=s+(2*i-1)
 return s
```

Bonus track: Productorias mediante un ciclo

Similarmente, si queremos programar una productoria, podemos hacerlo como antes mediante un ciclo y acumulando los productos parciales. Por ejemplo la fórmula para el factorial

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

se programaría así

Multiplicando mediante un ciclo en Python 3

```
def factorial(n):
 p=1
 for k in range (1,n+1):
        p=p*k
 return p
```

Parte II

Algunos ejemplos importantes de sumatorias

Suma de todos los naturales hasta uno dado

Consideremos ahora la suma

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

[ejercicio 3 de la práctica 2]¿podemos calcular el valor de $S(n)$?

```
>>> def S(n):
...     return sum([k for k in range(1,n+1)])
...
>>> for n in range(1,10):
...     print("S(",n,")=",S(n))
...
S( 1 )= 1
S( 2 )= 3
S( 3 )= 6
S( 4 )= 10
S( 5 )= 15
S( 6 )= 21
S( 7 )= 28
S( 8 )= 36
S( 9 )= 45
```

Un truco para calcularla

Por definición

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n$$

pero podemos calcularla en orden inverso

$$S(n)=\sum_{k=1}^{n} k = n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1$$

Sumando por columnas hay n columnas, y cada columna suma $n+1$,

$$2S(n)=n\cdot(n+1)$$

luego'

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicación

$$\prod_{k=1}^{n} a^k = a^{\sum_{k=1}^{n} k} = a^{S(n)} = a^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Sumas geométricas

Dado un número real a consideramos la suma geométrica de razón a

$$G_a(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$$

Si multiplicamos por a

$$aG_a(n) = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$$

Restando estas dos expresiones

$$(a-1)G_a(n) = a^{n+1} - 1$$

Entonces si $a \neq 1$, deducimos que

$$G_a(n) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Si $a \neq 1$. Si $a = 1$ esta fórmula no funciona, y tenemos que

$$G_a(n) = n + 1$$

Parte III

Otro método: Inducción matemática

Introducción

- En esta parte de la clase veremos otro método para establecer las fórmulas anteriores: el método de inducción matemática.
- Este método se aplica cuando queremos probar una cierta propiedad $P(n)$ que que depende de un número natural $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
  Técnicamente se denomina una función proposicional de n (tenemos una proposición para cada n). Queremos probar que es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

  Ilustraremos este método demostrando la a propiedad

$P(n)$:

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

El Principio de inducción matemática

Para demostrar nuestra propiedad

$$\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

vamos a a usar el

Principio de Inducción Matemática

Si $P(1)$ es verdadera, y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$P(1) \wedge [\forall n : P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N} : P(n)]$$

Este axioma expresa una propiedad fundamental de los números naturales.

El caso base

Veamos cómo demostrar nuestra propiedad usando inducción matemática:

$P(n)$:

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostremos $P(1)$. Si $n = 1$,

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} k = 1$$

mientras que

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

luego la fórmula es válida cuando $n = 1$.

El paso inductivo

Suponemos que vale $P(n)$, queremos probar entonces que vale $P(n+1)$.

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = S(n) + (n+1)$$

usando la hipótesis inductiva (y sacando factor común) esto es

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left[\frac{n}{2}+1\right] = (n+1)\cdot\left[\frac{n+2}{2}\right] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

que es la afirmación $P(n+1)$.

Por el principio de inducción matemática, concluimos que la fórmula es cierta para todo n natural.

Otro ejemplo: la fórmula de la suma geométrica por inducción

Similarmente podemos hacer inducción en el conjunto $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$P(n)$:

$$G_a(n) := \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0)$$

- caso base: si $n = 0$, $G_a(0) = 1$. $\frac{a^{n+1}-1}{a-1} = \frac{a^1-1}{a-1} = 1 \checkmark$.
- Paso inductivo: Vemos que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

$$G_a(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1} a^k = \sum_{k=0}^{n} a^k + a^{n+1} = G_a(n) + a^{n+1}$$

pero entonces usando la hipótesis inductiva,

$$G_a(n+1) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} + a^{n+1} = \frac{a^{n+1} - 1 + a^{n+1}(a-1)}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \checkmark$$

Parte IV

Un ejemplo con una productoria

Planteo del problema

Queremos calcular la productoria

$$F_a(n) := \prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})$$

Idea de la solución

¡Hagamos la distributiva! Con Pari/Gp encontré que

```
? (1+a)*(1+a^2)
%1 = a^3 + a^2 + a + 1
? (1+a)*(1+a^2)*(1+a^4)
%2 = a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1
? (1+a)*(1+a^2)*(1+a^4)*(1+a^8)
%3 = a^15 + a^14 + a^13 + a^12 + a^11 + a^10 + a^9 + a^8
+ a^7 + a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1
```

Entonces probaremos por inducción que

Lema

$$F_a(n) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a^k = G_a(2^{n+1} - 1)$$

El resultado que se obtiene

y después ¡usamos la fórmula para la suma geométrica que vimos antes! con lo que habremos probado

Teorema

$$\prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k}) = \frac{a^{2^{n+1}} - 1}{a - 1} \quad (a \neq 1, n \in \mathbb{N}_0)$$

Prueba del lema por inducción (1)

- caso base: Si $n = 0$,

$$F_a(n) = 1 + a^{2^0} = 1 + a = G_a(1) = G_a(2^1 - 1) \checkmark$$

- paso inductivo:

$$F_a(n+1) := \left[\prod_{k=0}^{n+1} (1 + a^{2^k})\right] = \left[\prod_{k=0}^{n} (1 + a^{2^k})\right] \cdot (1 + a^{2^{n+1}}) = F_a(n) \cdot (1 + a^{2^{n+1}})$$

Usando la hipótesis inductiva esto es

$$F_a(n+1) = G_a(2^{n+1} - 1) \cdot (1 + a^{2^{n+1}}) = G_a(2^{n+1} - 1) + a^{2^{n+1}} G_a(2^{n+1} - 1)$$

Un ejemplo con una productoria: argumento de inducción

Trabajemos con segundo término

$$a^{2^{n+1}} G_a(2^{n+1}-1) = a^{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} a^k = \sum_{k=0}^{2^{n'+1}-1} a^{k+2^{n+1}}$$

Acá hacemos el cámbio de índice $j = k + 2^{n+1} \Leftrightarrow k = j - 2^{n+1}$

$$a^{2^{n+1}} G_a(2^n - 1) = \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a^j$$

donde usamos que $2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned} F_a(n+1) &= G_a(2^{n+1}-1) + a^{2^{n+1}} G_a(2^{n+1}-1) \\ &= \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} a^j + \sum_{j=2^{n+1}}^{2^{n+2}-1} a^j \\ &= \sum_{j=0}^{2^{n+2}-1} a^j = G_a(2^{n+2}-1) = G_a(2^{(n+1)+1}-1) \checkmark \end{aligned}$$

Parte V

Algunas observaciones sobre la inducción matemática

Otra formulación

El principio de inducción matemática puede formularse de manera equivalente usando conjuntos en lugar de propiedades.

Definición

Decimos que un conjunto $C \subseteq \mathbb{N}$ es inductivo si

$$\forall n \in N : n \in C \Rightarrow n + 1 \in C$$

Entonces podemos reformular el principio de inducción matemática como sigue:

Principio de inducción matemática

Si $C \subseteq \mathbb{N}$ es inductivo y $1 \in C$, entonces $C = \mathbb{N}$.

Esto es porque si tenemos una propiedad $P(n)$ podemos considerar el conjunto

$$C = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$$

y si tenemos el conjunto C la propiedad $P(n)$ es $n \in C$.

¿Porqué hace falta la inducción?

Hay propiedades que valen para muchos n pero no para todo n. Veamos un ejemplo:
En los cursos de análisis se define una integral impropia de una función $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_0^R f(x)\, dx$$

Definamos una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = 1$$

Entonces consideremos la identidad

$$\int_0^\infty \prod_{k=0}^{n} g\left(\frac{x}{100k+1}\right)\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Esta identidad vale si

$$n < 9{,}8 \cdot 10^{42}$$

pero no para todo n, de hecho es falsa si $n > 7{,}4 \cdot 10^{43}$.
Referencia: Blog de John Baez https://johncarlosbaez.wordpress.com/2018/09/20/patterns-that-eventually-fail/

¿Porqué resulta fundamental probar el caso base?

Consideremos la siguiente propiedad de los números naturales

P(n)

$$n \geq 2$$

Claramente

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \Rightarrow n+1 \geq 2$$

por lo que el paso inductivo funciona para esta propiedad, aunque no es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$.

Equivalentemente $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$ es inductivo, pero $1 \notin S$ por lo que $S \neq \mathbb{N}$.

Una variante: Inducción “corrida”

Principio de Inducción Matemática “corrida”

Sea $P(n)$ una propiedad de los números naturales. Si para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, $P(n_0)$ es verdadera, y para todo $n \geq n_0$ se verifica que

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Demostración: definamos otra propiedad $Q(n) = P(n + n_0 - 1)$. Entonces Q satisface la versión original del principio de inducción matemática. Deducimos que $Q(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$, y eso es equivalente a decir que P es verdadera para $n \geq n_0$.

Un ejercicio que les dejo: inducción en los enteros

El conjunto de los enteros

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

verifica una forma algo diferente del principio de inducción:

Principio de Inducción Matemática en los enteros

Sea $P(n)$ una propiedad de los números enteros $n \in \mathbb{Z}$. Si para algún $n_0 \in \mathbb{Z}$, $P(n_0)$ es verdadera, y para todo $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que

$$P(n) \Rightarrow P(n+1) \wedge P(n-1)$$

entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio para pensar: Probar que este enunciado es equivalente a la versión original de la inducción matemática (en $\mathbb{N}$).