Conjuntos y Relaciones

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - clase 4- Segundo cuatrimestre de 2020

Uniones e intersecciones de familias finitas de conjuntos

En la clase anterior estudiamos las operaciones booleanas con conjuntos. En particular la unión e intersección.

Como vimos, estas operaciones son conmutativas y asociativas. Por lo tanto al unir o intersecar una familia finita de conjuntos $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, o sea al calcular

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

no importa en qué orden hagamos la operación.

Uniones e intersecciones de familias arbitrarias de conjuntos

Sin embargo, muchas veces necesitamos considerar uniones o intersecciones de familias de conjuntos que pueden ser infinitas. En ese caso, las operaciones de unión e intersección se definen como sigue:

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una familia de conjuntos (dentro de un universal $\mathcal{U}$) entonces

$$\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in \mathcal{U} : \exists A \in \mathcal{C} : x \in A\}$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{C}} A = \{x \in \mathcal{U} : \forall A \in \mathcal{C} : x \in A\}$$

Como vemos, estas operaciones están asociadas a los cuantificadores existencial y universal.

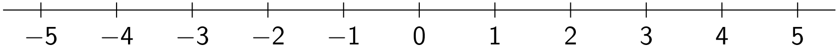
Un ejemplo

En $\mathcal{U} = \mathbb{N}$ consideramos la familia de intervalos $\mathcal{C} = \{I_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ dada por

$$I_k = [k, k+1) = \{x \in \mathbb{R} : k \leq x < k+1\}$$

entonces

$$\bigcup_{I_k\in\mathbb{Z}} I_k = \mathbb{R}, \quad \bigcap_{I_k\in\mathbb{Z}} I_k = \emptyset$$



Propiedades

Muchas de las propiedades que vimos la clase pasada, continúan siendo válidas para uniones e intersecciones de familias arbitrarias de conjuntos

Propiedad distributiva

$$\left(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right) \cap B = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} (A \cap B) \qquad \left(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right) \cup B = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} (A \cup B)$$

Leyes de De Morgan

$$\left(\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{C}} A^c \qquad \left(\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A^c$$

Recordamos: Pares ordenados y producto cartesiano

Si a, b son dos elementos notamos por (a, b) el par odenado formado por ellos. La propiedad clave de los pares ordenados es:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

De modo que por ejemplo $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Dados dos conjuntos A y B definimos su producto cartesiano por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo: si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{c, d\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, c), (2, c), (3, c), (1, d), (2, d), (3, d)\}$$

Si A y B son finitos, tenemos que:

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$$

‘

Recordamos: Relaciones

Una relación $\mathcal{R}$ de A en B es por definición un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.
Usualmente escribimos $a\,\mathcal{R}\,b$ en lugar de $(a,b) \in \mathcal{R}$. Y $a\,\not{\mathcal{R}}\,b$ en lugar de $(a,b) \notin \mathcal{R}$. Cuando $A = B$ decimos que R es una relación en A.
Ejemplo:
En el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ consideramos la relación $<$ (ser menor que).
Podemos pensarla como un conjunto de pares ordenados:

$$\mathcal{R} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$$

La relación $\leq$ (ser menor o igual que) corresponde a al conjunto de pares ordenados:

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

Mientras que la igualdad está representada por:

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$$

Recordamos: Tipos de Relaciones

Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto A

- $\mathcal{R}$ es reflexiva si $\forall x \in A : x \, \mathcal{R} \, x$
- $\mathcal{R}$ es simétrica si
$$\forall x, y \in A : x \, \mathcal{R} \, y \Rightarrow y \, \mathcal{R} \, x$$
- $\mathcal{R}$ es antisimétrica si
$$\forall x, y \in A : x \, \mathcal{R} \, y \wedge x \neq y \Rightarrow y \, \not\mathcal{R} \, x$$
- $\mathcal{R}$ es transitiva si
$$\forall x, y, z \in A : x \, \mathcal{R} \, y \wedge y \, \mathcal{R} \, z \Rightarrow x \, \mathcal{R} \, z$$
- $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.
- $\mathcal{R}$ es una relación de orden (parcial, en sentido amplio) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Referencia: definiciones 1.2.3 y 1.2.4 del apunte de la profesora Kirck.

Un ejemplo

Ejercicio

En $A = \mathbb{R}$, definimos una relación

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

Probar que es una relación de equivalencia.

- Propiedad reflexiva: Para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \mathcal{R} a$.

$$a \mathcal{R} a \Leftrightarrow a - a = 0 \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

- Propiedad simétrica: Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$.

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(a-b) = b - a \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \mathcal{R} a \quad \checkmark$$

- Propiedad transitiva: Para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \Rightarrow a \mathcal{R} v$.

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c &\Rightarrow a - b \in \mathbb{Z} \wedge b - c \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow (a-b) + (b-c) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a - c \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow a \mathcal{R} c \quad \checkmark \end{aligned}$$

Clases de equivalencia

Definición (clase de equivalencia, 1.2.5 en el apunte)

Cuando tenemos una relación de equivalencia $\mathcal{R}$ en un conjunto A, definimos la clase $\overline{x}$ de un elemento $x \in A$ como el subconjunto de A formado por todos los elementos relacionados con x.

$$\overline{x} = \{y \in A : y \,\mathcal{R}\, x\}$$

En el ejemplo anterior:

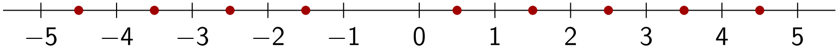
$$\overline{0} = \{y \in \mathbb{R} : y - 0 \in \mathbb{Z} \in\} = \mathbb{Z}$$

y en general si $x \in \mathbb{R}$,

$$\overline{x} = \{y \in \mathbb{R} : y - x \in \mathbb{Z} \in\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists k \in Z \; y = k + x\} = x + \mathbb{Z}$$

Ej: si $x = 1/2 = 0{,}5$,

$$\overline{x} = \{\ldots, -2{,}5, -1{,}5, 0{,}5, 1{,}5, 2{,}5, \ldots\}$$



Ejercicio que resolvimos en la clase anterior

Ejercicio 25-Práctica 1

Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A,

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), \\ (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

$$\overline{a} = \overline{b} = \overline{f} = \{a, b, f\}$$

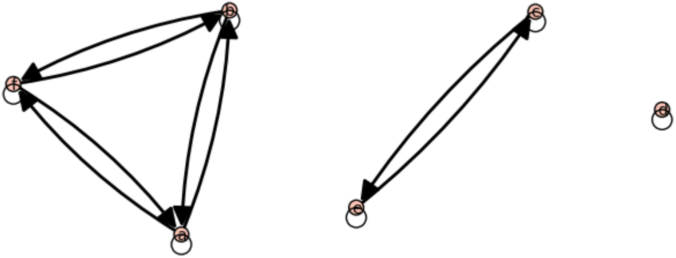
$$\overline{c} = \{c, e\}$$

$$\overline{d} = \{d\}$$

Representación como grafo dirigido

- Un nodo o vértice por cada elemento del conjunto.
- Los unimos con una arista o flecha cuando los elementos están relacionados.

Cuando la relación es de equivalencia, el grafo se parte en varios grafos completos.



El gráfico lo hice con el programa SageMath

```
G=DiGraph({"a":["a","b","f"],"b":["a","b","f"],"f":["a","b","f"],
"c":["c","e"],"e":["c","e"],"d":["d"]})
plot(G)
```

Propiedades de las clases de equivalencia

Proposicion (propiedades de las clases de equivalencia, 1.2.6 en el apunte)

Si x, y *en* A *tenemos que*

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$$

$$x \not\mathcal{R} y \Rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$$

Propiedades de las clases de equivalencia (2)

- Supongamos primero que
$$\overline{x} = \overline{y}$$
. Entonces como $\mathcal{R}$ es reflexiva,
$$x \mathcal{R} x \Rightarrow x \in \overline{x} \Rightarrow x \in \overline{y} \Rightarrow x \mathcal{R} y$$
Por otro lado si $x \mathcal{R} y$, veamos que $\overline{x} = \overline{y}$
- Empecemos probando la inclusión $\overline{x} \subseteq \overline{y}$: si $z \in \overline{x}$, $z \mathcal{R} x$. Entonces por la propiedad transitiva,
$$z \mathcal{R} x \wedge x \mathcal{R} y \Rightarrow z \mathcal{R} y \Rightarrow z \in \overline{y}$$
Como hicimos esto para cualquier $z \in \overline{x}$, probamos que $\overline{x} \subseteq \overline{y}$.

  Ahora si $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ por la propiedad simétrica. Por lo que podemos intercambiar los roles de x e y en el razonamiento anterior: si $z \in \overline{y}$, $z \mathcal{R} y$. Entonces por la propiedad transitiva,
$$z \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow z \mathcal{R} x \Rightarrow z \in \overline{x}$$
Como hicimos esto para cualquier $z \in \overline{x}$, probamos que $\overline{y} \subseteq \overline{x} \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$.

Propiedades de las clases de equivalencia (3)

Proposicion (propiedades de las clases de equivalencia, 1.2.6 en el apunte)

Si x, y en A tenemos que

$$x \not\mathcal{R}\, y \Rightarrow \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$$

En efecto, si $x \not\mathcal{R}\, y$ y existiera $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$,

$$z \,\mathcal{R}\, x \wedge z \,\mathcal{R}\, y$$

Por la simétrica reflexiva deducimos que

$$x \,\mathcal{R}\, z \wedge z \,\mathcal{R}\, y$$

y entonces por la propiedad transitiva,

$$x \,\mathcal{R}\, y$$

lo cuál contradice nuestra hipótesis.

Particiones

Definición

Sea A un conjunto no vacío y $P \subset \mathcal{P}(A)$ una familia de sub-conjuntos de A. Decimos que P es una patición de A si se cumplen las siguientes propiedades:

- *Cada conjunto en la familia P es no vacío.*
- *Los conjuntos de la famila P son disjuntos dos a dos*

$$\forall C_1, C_2 \in P : C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

- *La unión de todos los conjuntos de la familia P da A*

$$\bigcup_{C \in P} C = A$$

Ejemplo: Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$P_1 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$$

$$P_2 = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$$

son particiones de A

Relaciones de equivalencia y particiones

Teorema (proposición 1.2.8 en el apunte)

- *Sea $\mathcal{R}$ una relación en un conjunto no vacío A. Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en un conjunto A sus clases de equivalencia forman una partición de A.*
- *Recíprocamente, P es una partición de A y definimos una relación en A,*

$$x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \exists C \in P : x, y \in C$$

[o sea dos elementos están relacionados si pertenecen al mismo subconjunto en la partición] entonces $\mathcal{R}$ resulta una relación de equivalencia, y P es la partición determinada por sus clases de equivalencia.

Prueba del teorema

- Si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia, ya vimos que las clases de equivalencia son disjuntas dos a dos. Si $x \in A$, como $x \,\mathcal{R}\, x$ por la propiedad reflexiva, $x \in \overline{x}$. Con lo que las clases de equivalencia son no vacías y su unión es A.
- Recíprocamente dada una partición P, definamos $\mathcal{R}$ como en el enunciado entonces
  - $\mathcal{R}$ es reflexiva pues si $x \in A$, hay un único conjunto C de la partición P al cual pertenece.

    $$x \,\mathcal{R}\, x \Leftrightarrow \exists C \in P : x, x \in C \quad \checkmark$$

  - $\mathcal{R}$ es simétrica pues si $x \,\mathcal{R}\, y$ existe $P \in C$ tal que $x, y \in C$ pero entonces

    $$y \,\mathcal{R}\, x \Leftrightarrow \exists C \in P : y, x \in C \quad \checkmark$$

  - $\mathcal{R}$ es transitiva pues si $x \,\mathcal{R}\, y \wedge y \,\mathcal{R}\, z$ existen $C_1, C_2 \in P$ tal que $x, y \in C_1$ y $y, z \in C_2$. Pero como P es una partición

    $$y \in C_1 \wedge y \in C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$$

    (pues conjuntos diferentes en la partición son disjuntos) luego tomando $C = C_1 = C_2$,

    $$x \,\mathcal{R}\, z \Leftrightarrow \exists C \in P : x, z \in C \quad \checkmark$$

Existe un único

Si $P(x)$ es una función proposicional notamos por

$$\exists! x : P(x)$$

a "existe un único x que cumple P(x)"

$$\exists! x : P(x) \Leftrightarrow [\exists x : P(x)] \wedge [\forall x, y : P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y]$$

Esta afirmación tiene dos partes:

- Existencia: $\exists x : P(x)$
- Unicidad: $\forall x, y : P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$

Ejemplo: Para todo número real x mayor igual que cero, existe una única raíz cuadrada y mayor o igual que cero:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \exists! y \in \mathbb{R} : y^2 = x \wedge y \geq 0$$

Funciones

Las funciones son un tipo especial de relaciones.

Dados dos conjuntos A y B, una función f de A en B es una relación de A en B con la propiedad de que para cada $x \in A$ exista un único $y \in B$ tal que $(a, b) \in f$.

$$\forall x \in A \exists ! y : (x, y) \in f$$

A se llama el dominio de la función f y B su codominio.

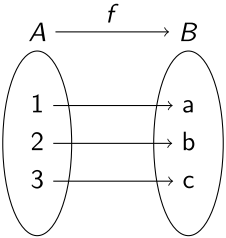
Notación usual: $f(a) = b$

Ejemplo: como mencionamos en la transparencia anterior para cada $x \geq 0$ real, existe un único $y \geq 0$ real tal que $y^2 = x$. Esto define la función raíz cuadrada. Y usualmente escribimos

$$y = f(x) = \sqrt{x}$$

Notamos que una propiedad fundamental de las funciones es que preservan las igualdades. Si f es una función,

$$x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$$



$$A = \{1, 2, 3\}$$

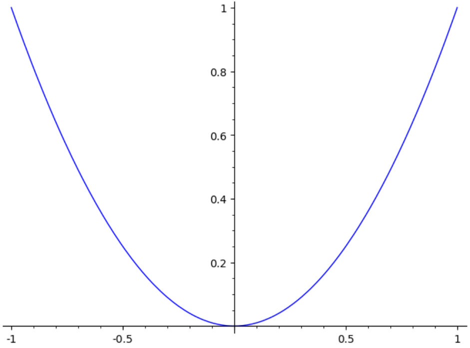
$$B = \{a, b, c\}$$

$$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$$

Tablas de valores y gráficos cartesianos

Consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$

x	$y = f(x)$
1	1
2	4
3	9
$\ldots$	$\ldots$



Las funciones en la computadora

Muchos lenguajes de programación permiten definir funciones. Ejemplos en Python 3:

```
>>> def f(x):
...     return x*x
...
>>> f(2)
4
>>> f(3)
9
```

La diferencia es que en Python 3 las funciones pueden tener efectos colaterales:

```
>>> def g(x):
...     print("hola")
...     return x*x
...
>>> g(2)
hola
4
```

La función identidad y las funciones constantes

Igualdad de funciones

Dos funciones $f, g : A \to B$ se consideran iguales si toman los mismos valores

$$f = g \Leftrightarrow \forall x \in A : f(x) = f(y)$$

Ejemplo: consideramos $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = |x|^2$$

Como $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f = g$ (es decir: las consideramos la misma función).

Imagen de una función - Funciones sobreyectivas

Definición

Si $f : A \to B$ es una función, la imagen de f se define como el conjunto de elementos del codominio B que están relacionados con algún elemento del dominio A

$$Im(f) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}$$

Cuando $Im(f) = B$ decimos que la función f es sobreyectiva o suyectiva.

Ejemplos:

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x^2$

$$Im(f) = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = [0, +\infty)$$

  No es suryectiva.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$. $Im(g) = \mathbb{R} \Rightarrow$ es suryectiva.
- $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to h : \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $h(x) = x^2$. $Im(g) = \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow$ es suryectiva.

Notemos que f y h son funciones diferentes pues su dominio y codominio lo son.

Funciones inyectivas

Definición

Decimos que $f : A \to B$ es inyectiva si elementos diferentes van a parar por f a elementos diferentes

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o lo que es equivalente

$$\forall x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Si f es a la vez inyectiva y sobreyectiva, decimos que f es biyectiva o que es una biyección

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x^2$ NO es inyectiva pues $f(2) = f(-2) = 4$.
- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3$. $Im(g) = \mathbb{R} \Rightarrow$ es inyectiva.Como era suyectiva $\Rightarrow$ es biyectiva.
- $k : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$ es inyectiva pero no suryectiva. $-1 \notin Im(k)$. No es biyectiva.

Composición de funciones

Función Inversa