Operaciones con conjuntos (álgebra Booleana)

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - clase 3- Segundo cuatrimestre de 2020

Recordamos: Operaciones Booleanas con los conjuntos

Como vimos en las clases anteriores, es posible definir varias operaciones con los conjuntos a partir de los conectivos lógicos. Dados dos conjuntos A y B dentro de un universal (o referencial) $\mathcal{U}$

- Unión: (asociada al ó lógico no excluyente)

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \vee x \in B\}$$

- Intersección: (asociada al y lógico)

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \in B\}$$

- Complemento: (asociada al no lógico)

$$A^c = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\} = \{x : \sim (x \in A)\}$$

- Diferencia:

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$$

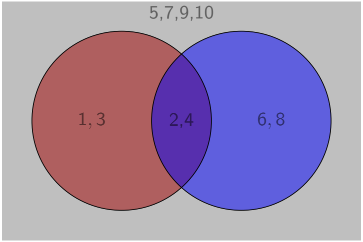
- Diferencia simétrica: (asociada al ó lógico excluyente)

$$A \Delta B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \veebar x \in B\} = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Un ejemplito

En $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ consideramos los conjuntos

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow A^c = \mathcal{U} - A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow B^c = \mathcal{U} - B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$$



$$A \cap B = \{2, 4\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$
$$A - B = A \cap B^c = \{1, 3\}, \quad B - A = B \cap A^c = \{6, 8\}$$
$$A \Delta B = \{1, 3, 6, 8\}$$
$$A^c \cap B^c = \{5, 7, 9, 10\}$$

En la computadora

Lo anterior puede calcularse fácilmente en Python 3 que tiene el tipo de datos set conjunto.

```
´>>> A={1,2,3,4}
>>> type(A)
<class 'set'>
>>> B={2,4,6,8}
>>> A.union(B)
{1, 2, 3, 4, 6, 8}
>>> A.intersection(B)
{2, 4}
>>> A.difference(B)
{1, 3}
>>> A.symmetric_difference(B)
{1, 3, 6, 8}
>>> V={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
>>>  Ac=V.difference(A); Ac
{5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

Otro ejemplo

En $\mathcal{U} = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ consideramos los conjuntos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par}\} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$
$$\Rightarrow A^c = \mathcal{U} - A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es impar}\} = \{1, 3, 5, \}$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo}\} = \{2, 3, 5, 7, \ldots\}$$
$$\Rightarrow B^c = \mathcal{U} - B = \{n \in \mathbb{N} : n = 1 \vee \; n \text{ es compuesto}\} = \{1, 4, 6, 8, \ldots\}$$

$$A \cap B = \{2\}, A \cup B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo ó par}\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, \ldots\}$$

$$A - B = A \cap B^c = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo impar}\} = \{3, 5, 7, \ldots\}$$

$$B - A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es par pero no primo}\} = \{4, 6, 8, \ldots\}$$

$$A \Delta B = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es primo ó par pero no ambas cosas a la vez}\}$$
$$= \{4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, \ldots\}$$

Algunas propiedades de estas operaciones

Propiedad conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \Delta B = B \Delta A$$

Propiedad Asociativa

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

Elementos neutros y absorbentes

Elemento Neutro

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$
$$A \Delta \emptyset = A$$

Elemento Absorbente

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotencia - Relaciones con la inclusión

Idempotencia

$$(A^c)^c = A$$
$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

Relaciones con la inclusión

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$$

Propiedades que relacionan las distintas operaciones

Propiedad Distributiva

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad \text{Ejercicio 14, i}$$

Leyes de De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Referencia: Proposición 1.1.6 del apunte de la profesora Krick,

Propiedades de la inclusión

Propiedade Reflexiva

$$A \subseteq A$$

Propiedad antisimétrica

$$A \subseteq B \wedge A \neq B \Rightarrow B \not\subseteq A$$

Propiedad Transitiva

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$\subseteq$ es una relación de orden en $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Más relaciones útiles

Algunas propiedades más

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A - \emptyset = A$$
$$\emptyset - A = \emptyset$$
$$A \Delta A^c = \mathcal{U}$$
$$A - A^c = A$$
$$A^c - A = A^c$$
$$A \Delta \mathcal{U} = A^c$$
$$A \Delta A = \emptyset$$

Fórmulas Booleanas

Definición

Una *fórmula booleana* *en los conjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *es una fórmula que se pueda escribir a partir de ellos y de los conjuntos vacío* $\emptyset$ *y universal* $\mathcal{U}$*, combinándolos por medio de las operaciones booleanas*

Ejemplos:

$$A \cup B \cup \emptyset$$

$$(A \cap B^c) - (A \cup \emptyset)$$

son fórmulas booleanas en los conjuntos A, B.

$$A \cap B \cap C^c$$

$$A - (A \cup B \cup C)$$

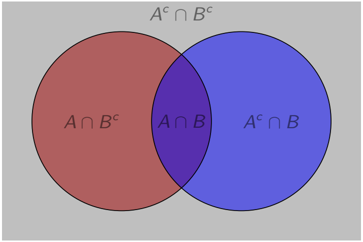
$$A \cap B \cap \mathcal{U} \cap C$$

son fórmulas Boobleanas en los conjuntos A, B, C

Las expresiones que aparecen en la lista de propiedades anteriores y en el ejercicio 14 de la práctica 1 son todos ejemplos de fórmulas booleanas.

Fórmulas Booleanas con 2 conjuntos

Supongamos que tenemos 2 conjuntos A y B, ¿cuántos conjuntos podemos formar a partir de ellos mediantes fórmulas booleanas?



Tenemos $2^2 = 4$ regiones en este diagrama. Los conjuntos que se pueden formar, se obtienen uniendo algunas de las regiones de este diagrama. Ejemplos:

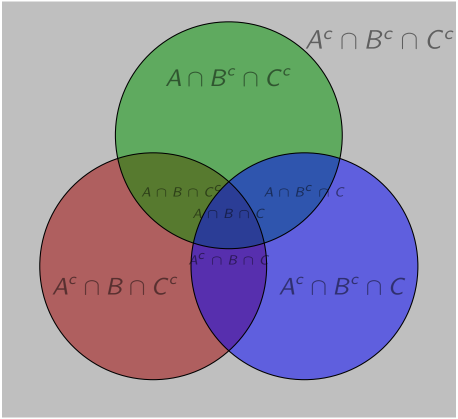
$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

Esta forma de escribir las fórmulas se conoce como forma normal diyuntiva. Rta: Hay $2^4 = 16$ conjuntos que podemos obtener (contando el conjunto vacío).

Fórmulas Booleanas con 3 conjuntos

Consideramos ahora tres conjuntos A, B y , C



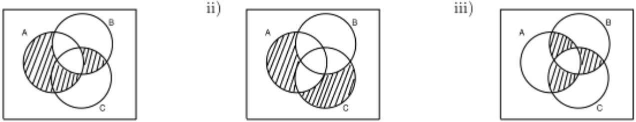
Hay ahora $2^3 = 8$ regiones en este gráfico, y podemos obtener entonces $2^8 = 256$ conjuntos diferentes a partir de A, B, C mediante fórmulas booleanas (contando el conjunto vacío).

Ejercicio 8 de la práctica 1

Veamos por ejemplo la respuesta del Ejercicio 8 de la práctica 1 item i) en forma nomral disyuntiva:

8. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

i) ii) iii)



$$i) = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$$

Les dejo para pensar cómo escribir ii) y iii) en la forma normal disyuntiva.

Un ejercicio que consultaron en la clase anterior

Ejercicio 14, item iii)

Sean A, B subconjuntos de un universal $\mathcal{U}$,

$$A - (A \Delta B) = A \cap B$$

Vamos a discutir distintas formas de resolver este ejercicio.

Solución mediante tablas de verdad

Teniendo en cuenta la relación entre las operaciones de conjuntos y conectivos lógicos, para cada $x \in \mathcal{U}$ llamamos p a la proposición $x \in A$ y q a la proposición $x \in B$, entonces el ejercicio pedido

$$A - (A \Delta B) = A \cap B$$

es equivalente a verificar que la siguiente fórmula T del cálculo proposicional es una tautología

$$p \wedge \sim (p \veebar q) \Leftrightarrow p \wedge q$$

y esto fácilmente podemos comprobarlo mendiante un tabla de verdad

p	q	$p \veebar q$	$\sim (p \veebar q)$	$p \wedge \sim (p \vee q)$	$p \wedge q$	T
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

https://github.com/pdenapo/programitas-algebraI/blob/master/Python/2020/Ej14-3-pca1.py

Otra estrategia

Otra estrategia posible para probar identidades que involucran fórmulas booleanas como las del ejercicio 14, es:

- Escribir todo en términos de uniones, interescciones y complementos.
- Llevar ambos miembros de la identidad que uno quiere probar a la forma normal disyuntiva por medio de las propiedaes de las uniones e intersecciones (asociativa, conmutativa, distributiva y leyes de De Morgan).
- Comparar los resultados.

Veamos cómo funciona esto con el ejercicio pedido

$$A - (A \Delta B) = A \cap B$$

Observamos que el lado derecho ya está en forma normal disyuntiva. Vamos a trabajar con el lado izquierdo.

Otra solución usando las propiedades del álgebra Booleana

Comenzamos expresando la diferencia simétrica del siguiente modo

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Luego usando las leyes de De Morgan:

$$\begin{aligned} A - (A \Delta B) &= A \cap [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)]^c \\ &= A \cap [(A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c] \\ &= A \cap [(A^c \cup (B^c)^c) \cap (B^c \cup (A^c)^c)] \\ &= A \cap [(A^c \cup B) \cap (B^c \cup A)] \end{aligned}$$

Usando la propiedad asociativa de la interesección esto es

$$A - (A \Delta B) = [A \cap (A^c \cup B)] \cap [B^c \cup A]$$

Otra solución usando las propiedades del álgebra Booleana (2)

Ahora por la propiedad distributiva

$$A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) = A \cap B$$

Reemplazamos esto en nuestra fórmula anterior

$$\begin{aligned} A - (A \Delta B) &= [A \cap (A^c \cup B)] \cap [B^c \cup A] \\ &= [A \cap B] \cap (B^c \cup A) \end{aligned}$$

De nuevo por la propiedad asociativa, esto lo podemos escribir como

$$A - (A \Delta B) = A \cap [B \cap (B^c \cup A)]$$

y de nuevo por la propiedad distributiva

$$B \cap (B^c \cup A) = (B \cap B^c) \cup (B \cap A) = \emptyset \cup (B \cap A) = B \cap A$$

Sustituyendo y usando las propiedades asociativa y conmutativa, vemos que:

$$A - (A \Delta B) = A \cap [B \cap A] = A \cap [A \cap B] = [A \cap A] \cap B = A \cap B$$

¿Qué hacemos si hay inclusiones?

Ahora consideremos otro de los items del ejercicio 14:

Ejercicio 14, item iv)

Sean A, B subconjuntos de un universal $\mathcal{U}$,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

Solución usando tablas de verdad

La solución mediante el método de las tablas de verdad es directa.
De nuevo, llamamos p a la proposición (función proposicional) $x \in A$ y q a la proposición $x \in B$. Entonces la afirmación

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

es equivalente a probar que la siguiente fórmula T del cálculo proposicional

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

es una tautología.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	T
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

https://github.com/pdenapo/programitas-algebraI/blob/master/Python/2020/Ej14-4-pca1.py

¿Y si queremos usar las propiedades de las operaciones?

En ese caso, recordemos que podemos traducir las inclusiones en uniones o intersecciones usando las

Relaciones con la inclusión

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Entonces por ejemplo

$$\begin{aligned} A \subseteq B &\Leftrightarrow A \cup B = B \\ &\Leftrightarrow (A \cup B)^c = B^c \\ &\Leftrightarrow A^c \cap B^c = B^c \quad \text{Por la ley de De Morgan} \\ &\Leftrightarrow B^c \subseteq A^c \end{aligned}$$

Un comentario [extra a la materia]

El método anterior de usar unas propiedades ya conocidas de las operaciones booleanas para probar otras tiene un problema ¿Cómo sabemos que no estams usando lo que queremos probar?
Una solución es considerar un sistema de postulados o axiomas que describen las propiedades básicas de dichas operaciones. Y deducir de ellos las demás.

1. $\forall A, B \exists C : C = A \cup B$
2. $\forall A, B \exists C : C = A \cap B$
3. $\exists \emptyset : A \cup \emptyset = A$
4. $\exists \mathcal{U} : A \cap \mathcal{U} = A$
5. $\forall A, B : A \cup B = B \cup A$
6. $\forall A, B : A \cap B = B \cap A$
7. $\forall A, B, C : A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $\forall A, B, C : A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. $\forall A \exists A^c : A \cup A^c = \mathcal{U} \wedge A \cap A^c = \emptyset$

Estos son los axiomas de Huntington para un álgebra de Boole.

Un comentario [extra a la materia - parte 2]

Estos axiomas definen una estructura abstracta que se conoce como un álgebra de Boole.

- Si $\mathcal{U}$ es un conjunto universal dado,

$$(\mathcal{P}(\mathcal{U}), \cup, \cap, \emptyset, \mathcal{U}, ^c)$$

  es un álgebra de Boole.

- El conjunto de valores de verdad $\mathcal{T} = \{V, F\}$

$$(\mathcal{T}, \vee, \wedge, F, V, \sim)$$

  es otro ejemplo de un álgebra de Boole.

Esto quiere decir que las leyes algebraicas de las operaciones con conjuntos (que exploramos en la clase hoy) y las de los conectivos lógicos actuando sobre los valores de verdad que estudiamos en la primer clase son las mismas.