Conjuntos y Relaciones

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - clase 2 - Segundo cuatrimestre de 2020

Formas de definir un conjunto

- Por extensión: enumerando sus elementos.
  Ej:
  $$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$
- Por compresión: mediante una propiedad (función proposicional) que describe cuales son sus elementos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 10 \wedge n \text{ es par}\}$$

Aquí $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ denota el conjunto de los números naturales.

Conjuntos finitos e infinitos

Notemos que la enumeración por extensión sólo resulta precisa si el conjunto es finito es decir si puede enumerarse sus elementos en una lista que termina en algún momento:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Si los a_i son todos distintos, A tendrá n elementos. Decimos que el cardinal de A es n. $\#(A) = n$.
Técnicamente: si puede establecerse una biyeccción entre el conjunto y una sección inicial $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ de los números naturales.

$\mathbb{N}$ por otra parte es un ejemplo de un conjunto infinito (que no se puede enumerar en una lista que termina). Muchos conjuntos que usamos en matemática son infinitos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ números enteros}\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\} \text{ números racionales}\right\}$$

$$\mathbb{R} = \text{ números reales} \quad \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \text{ números complejos}$$

Inclusión y pertenencia

- Si x es un elemento del conjunto A, decimos que x pertenece a A y escribimos

$$x \in A$$

Si x no perteneces a A escribimos $x \notin A$.

$$\text{Ejemplos: } 4 \in \mathbb{N}, -3 \notin \mathbb{N}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

- Si A y B son dos conjuntos decimos que A está incluido en B y lo escribimos $A \subseteq B$ si todo elemento de A es también un elemento de B

$$A \subseteq B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Ejemplos: $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Vemos que la noción de igualdad entre los conjuntos está asociada a la implicación lógica.

Cuando $A \subseteq B$ decimos también que A es un subconjunto de B.

Distinguiendo inclusión de pertenencia

Con frecuencia, los conjuntos pueden ser a su vez elementos de otros conjuntos. En ese caso, es importante distinguir inclusión de pertenencia, ya que son nociones diferentes.

Ejemplo:

$$A = \{1, \{2\}\}$$

Entonces $1 \in A$ mientras que $2 \notin A$.
Por otra parte, $\{1\} \subseteq A$ mientras que $\{2\} \not\subseteq A$.

Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B se consideran iguales si tienen los mismos elementos (sin importar su orden).

$$A = B \Leftrightarrow [\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B]$$

Otra manera de expresarlo es por medio de la inclusión

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 1, 3\}$ son iguales (son el mismo conjunto).
Ejemplo 2: $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 4\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$ son iguales pues si x es un número real

$$x^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Así vemos que la noción de igualdad entre los conjuntos está asociada a la equivalencia lógica.

Notamos que hay un único conjunto sin elementos, el conjunto vacío. Lo notamos $\emptyset = \{\}$.

Operaciones Booleanas con los conjuntos

Como vimos en la clase anterior, es posible definir varias operaciones con los conjuntos a partir de los conectivos lógicos. Dados dos conjuntos A y B

- Unión: (asociada al lógico no excluyente)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- Intersección: (asociada al *y* lógico)

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

- Complemento: (asociada al *no* lógico)

$$A \cap B = \{x : x \notin A\} = \{x : \sim (x \in A)\}$$

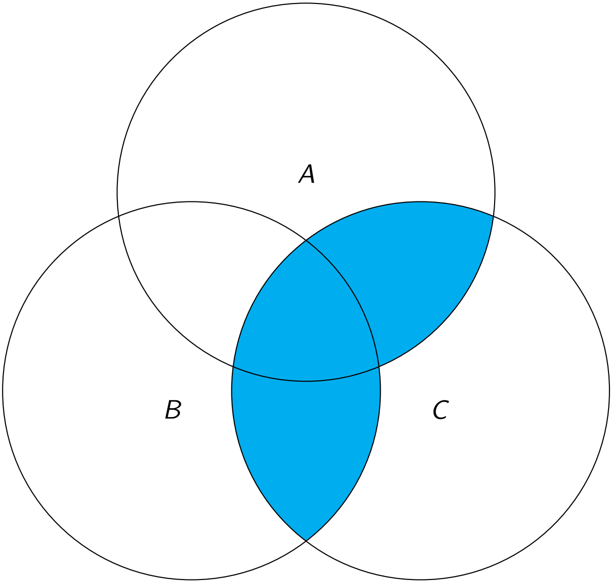
- Diferencia:

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} = A \cap B^c$$

- Diferencia simétrica: (asociada al lógico excluyente)

$$A \Delta B = \{x : x \in A \veebar x \notin B\} = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Diagramas de Venn. Ej, $(A \cap C) \cup (B \cap C)$



Conjunto de partes de un conjunto

Si A es un conjunto, notamos como $\mathcal{P}(A)$ al conjunto de partes de A formado por todos los subconjuntos de A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

Ejemplo: si $A = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1,3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- Notemos que siempre $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y $A \in \mathcal{P}(A)$.
- Si A es finito y $\#(A) = n$, entonces $\#(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.

Un ejercicio

Enunciado

Si A y B son dos conjuntos,

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Para probar una igualdad entre conjuntos, hay que probar dos inclusiones. Empecemos pues probando que

$$\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Sea $C \in \mathcal{P}(A \cap B) \Rightarrow C \subseteq A \cap B \Rightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$
Esto es porque si $C \subseteq A \cap B$,

$$x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Pero entonces, $C \in \mathcal{P}(A)$ y $C \in \mathcal{P}(B)$.Es decir que $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
Como lo probamos para cualquier $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$ probamos la inclusión deseada.

Un ejercicio (la otra inclusión)

Ahora queremos probar la otra inclusión

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$$

Sea $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, entonces $C \in \mathcal{P}(A)$ y $C \in \mathcal{P}(B)$ por lo que $C \subseteq A$ y $C \subseteq B$.
Entonces $C \subseteq A \cap B$.
Esto es porque

$$x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$$

Deducimos que

$$C \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

Y de nuevo, como eso lo hicimos para cualquier $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, hemos probado la otra inclusión.

Como probados las dos inclusiones, hemos demostrado la igualdad pedida.

Una variante....

Enunciado

Si A y B son dos conjuntos, ¿será verdad que?

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

Pensando la variante

Si $C \subset \mathcal{P}(A \cup B) \Rightarrow C \subseteq A \cup C$.
Pero esto en general no va a implicar que $C \subseteq A$ o $C \subseteq B$. (o sea que $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$).
Por lo que la inclusión

$$\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

es falsa en general.
Para verlo, debemos dar un contraejemplo. Tomamos:

$$C = \{1, 2\}, A = \{1, 3\}, B = \{2, 4\}$$

Entonces

$$C \subseteq A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

pero $C \not\subseteq A$ y $A \not\subseteq B$.
Bastanta ver que una de las inclusiones no se verifica, para que la igualdad propuesta no sea cierta.
Esto ocurre aún si la otra inclusión se verificara como ocurre en este caso. Pueden comprobar que sí es cierto en general que

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$$

Repensando lo que acabamos de hacer

Otra forma de pensar lo que acabamos de hacer es la siguiente:
La negación de la afirmación

$$\forall A, B : \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

es

$$\exists A, B : \mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

Por eso para ver que es falsa, basta exhbir un contrajemplo como acabamos de hacer.

Pares ordenados y producto cartesiano

Si a, b son dos elementos notamos por (a, b) el par odenado formado por ellos. La propiedad clave de los pares ordenados es:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

De modo que por ejemplo $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Dados dos conjuntos A y B definimos su producto cartesiano por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Ejemplo: si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{c, d\}$ entonces

$$A \times B = \{(1, c), (2, c), (3, c), (1, d), (2, d), (3, d)\}$$

Si A y B son finitos, tenemos que:

$$\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$$

'

Relaciones

Una relación R de A en B es por definición un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Usualmente escribimos $a \, R \, b$ en lugar de $(a, b) \in R$. Y $a \not R \, b$ en lugar de $(a, b) \notin R$. Cuando $A = B$ decimos que R es una relación en A.

Ejemplo:

En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ consideramos la relación $<$ (ser menor que). Podemos pensarla como un conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

La relación $\leq$ (ser menor o igual que) corresponde a al conjunto de pares ordenados:

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$$

Mientras que la igualdad está representada por:

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

Tipos de Relaciones

Sea R una relación en un conjunto A

- R es reflexiva si $\forall x \in A : xRx$
- R es simétrica si
$$\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$$
- R es antisimétrica si
$$\forall x, y \in A : xRy \wedge x \neq y \Rightarrow y \not R\, x$$
- R es transitiva si
$$\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$
- R es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.
- R es una relación de orden (parcial, en sentido amplio) si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Referencia: definiciones 1.2.3 y 1.2.4 del apunte de la profesora Kirck.

Algunos ejemplos: Igualdad y orden usuales

- La relación de igualdad en cualquier conjunto es de equivalencia.
- La relación $\leq$ en el conjunto $\mathbb{R}$ de los reales (o cualquier subconjunto de él) es una relación de orden.
- ¡En cambio $<$ no lo sería de acuerdo a la definición anterior pues no es reflexiva!

  A veces se consideran relaciones de oden estricto, verifcan
  - propiedad antireflexiva
    $\forall x \in A : x \not R\, x.$
  - propiedad asimétrica
    $\forall x, y \in A : x\, R\, y \Rightarrow y \not R\, x.$
  - propiedad transitiva,

$$\forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

  $<$ es una relación de orden estricto en $\mathbb{R}$. Pero nosotros NO usaremos esta terminología.

Órdenes parciales y totales

- La relación de divisibilidad en el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$

$$a|b \Leftrightarrow \exists c : b = a \cdot c$$

es una relación de orden.
Notemos que en esta relación existen elementos que no son comparables por ejemplo $4 \not| 6$ y también $6 \not| 4$.
Por eso, muchas veces se llama a las relaciones de óden de acuerdo a la definición anterior relaciones de orden parcial.

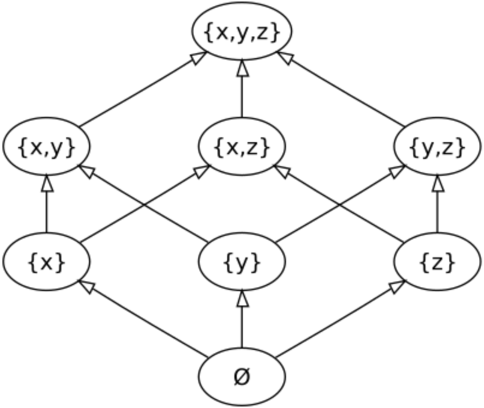
En cambio, una relación de orden R en un conjunto A se dice total (o lineal) si

$$\forall x, y \in A : xRy \vee yRx$$

La relación $\leq$ en los reales verifica esta propiedad. Pero la divisibilidad en los naturales no.

Otro ejemplo: la inclusión de conjuntos

La inclusión (en el conjunto de partes de un conjunto dado) es una relación de orden (parcial) El diagramma de Hasse de la inclusión en $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ es



Este ejemplo nos muestra un modo útil de representar las relaciones por medio de un grafo dirigido. Fuente del gráfico: artículo Partially ordered set en Wikipedia.

Un ejemplo de relación de equivalencia

Más adelante estudiaremos la relación de congruencia entre los enteros con respecto a un módulo dado $d \in \mathbb{N}$.

$$a \equiv b \pmod{d} \Leftrightarrow d | b - a$$

Es una relación de equivalencia en el conjunto de los enteros.
Una relación de equivalencia determina una partición de su dominio en clases de equivalencia [teorema 1.2.6 del apunte].
Por ejemplo, consideramos $d = 4$. Hay cuatro clases de equivalencia módulo 4 que son

$$C_0 = \{\ldots, -16, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16, ...\}$$

$$C_1 = \{\ldots, -15, -7, -3, 1, 5, 9, 13, 17, ...\}$$

$$C_2 = \{\ldots, -14, -6, -2, 2, 6, 10, 14, 18, ...\}$$

$$C_3 = \{\ldots, -13, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19, ...\}$$

¿Porqué son útiles las relaciones de equivalencia?

Las relaciones de equivalencia se usan frecuentemente en matemática para construir conceptos abstractos.

Consideremos por ejemplo la construcción de los números racionales a partir de los números enteros.

Esta construcción funciona así: Se define una relación de equivalencia en el conjunto de fracciones

$$\frac{a}{b} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$$

especificando que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

[Estas fracciones pueden pensarse como otra forma de escribir el par ordenado (a, b)´]

Cada clase de equivalencia es un número racional.

¿Cómo se probaría que $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia?

- Propiedad reflexiva: Veamos que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$$

esto por definición significa que $ab = ba$ lo cual es cierto.

- Propiedad simétrica: Tenemos que ver que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}$$

Pero por definición, la hipótesis significa que

$$ad = bc$$

y la tesis que

$$cb = da$$

Entonces se demuestra así

$$ad = bc \Rightarrow bc = ad \Rightarrow cb = da$$

usando la propiedad simétrica de la igualdad y la propiedad conmutativa del producto en los enteros.

¿Cómo se probaría que $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia? (2)

Nos falta ver la propiedad transitiva. Tenemos que ver que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \wedge \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$$

La hipótesis significa que

$$ad = bc \wedge cf = de$$

mientras que la tesis dice que

$$af = be$$

La cuenta sería así. Multiplicando las igualdades

$$ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow (ad)(cf) = (bc)(de)$$

Usando las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$ esto es

$$(af)(cd) = (be)(cd)$$

Sabemos que $f \neq 0$. Si $c \neq 0$, $cd \neq 0$ podemos cancelarlo y obtenemos la conclusión buscada.

¿Cómo se probaría que $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia? (3)

Nos queda el caso en que $c = 0$. En este caso la hipótesis se reduce a

$$ad = 0 \wedge 0 = de$$

Como sabemos que $d \neq 0$, concluimos que

$$a = 0 \wedge e = 0$$

Pero entonce la tesis

$$af = be$$

se cumple trivialmente (es $0 = 0$).
Esto completa la prueba de la propiedad transitiva.
Y por lo tanto hemos probado que $\sim$ es efectivamente una relación de equivalencia.
Referencia: https://www.math.wustl.edu/~freiwald/310rationals.pdf