Lógica Matemática: Proposiciones y Conjuntos

Pablo L. De Nápoli

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Álgebra I - clase 1- Segundo cuatrimestre de 2020

Lógica Matemática

- En la clase de hoy, veremos algunas ideas básicas de la lógica matemática. Esta parte de la matemática aplica los métodos de la matemática a la lógica.
- Particularmente estudiaremos lo que se conoce como lógica proposicional o cálculo proposicional.
- Se desarrolló especialmente a partir de los trabajos del matemático y lógico inglés George Boole (1815–1864), por lo que se la conoce también como lógica booleana.
- Probablemente hayan estudiado este tema en la materia Introducción al Pensamiento Científico del CBC. Los alumnos de computación también lo profundizarán más adelante en la materia Lógica y Computabilidad (que los de matemática pueden hacer como materia optativa).

Proposiciones y Valores de Verdad

- Una proposición una afirmación que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo

  "2 es un número par"

  "Todo triángulo tiene cuatro lados"

  son dos proposiciones (la primera es verdadera, la segunda es falsa).

- Toda la matemática se hace con proposiciones.

- Decimos que el valor de verdad de una proposición es verdadero (V) o falso (F), según sea el caso.

Funciones proposicionales y conjuntos

Usualmente en matemática se consideran proposiciones cuyo valor de verdad depende de una o más variables. Tenemos entonces una función proposicional. Por ejemplo consideremos la afirmación

"n es un número par"

donde la variable n recorre el universo (o conjunto universal) de los números pares.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

A una función proposicional le podemos asignar el conjunto (o clase) de los elementos del universo que la cumplen. En ese caso será el conjunto de los números pares

$$P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

Pertenencia a un conjunto

Recíprocamente dado un conjunto A, podemos asociarle la función proposicional

"x pertenece a A"

o en símbolos

$$x \in A$$

donde x recorre el universo en el que estemos trabajando.
Por ejemplo, si P es el conjunto de los números pares que consideramos antes, la proposición

$$2 \in P$$

es verdadera, mientras que

$$3 \in P$$

es falsa.
De este modo vemos, que la lógica proposicional y los conjuntos son dos lenguajes que muchas veces resultan equivalentes.

Conectivos Lógicos

Si p y q son dos proposiciones, podemos formar nuevas proposiciones por medio de los conectivos lógicos. La tabla siguiente resume sus diferentes nombres y significados:

Lógica matemática	lenguaje cotidiano	computación (inglés)
$\neg p$	no p	NOT p
$p \wedge q$	p y q	p AND q
$p \vee q$	p o q (no excluyente)	p OR q
$p \veebar q$	p o q (excluyente)	p XOR q
$p \Rightarrow q$	si p entonces q	
$p \Leftrightarrow q$	p si y sólo si q	

La idea clave es que estas expresiones de uso frecuente en los razonamientos matemáticos, pueden tratarse como operaciones matemáticas entre las proposiciones. Y que los valores de verdad de estas proposiciones compuestas, están determinados por los de p y q. Analizaremos a continuación cada conectivo lógico en detalle.

Aplicaciones de los conectivos lógicos

- Los conectivos lógicos se emplean en todos los lenguajes de programación, para poder expresar condiciones bajo las cuales deba ejecutarse o no una parte del programa. Generalmente se utilizan en los los nombres en inglés, indicados en la última columna de la tabla anterior.
- Las operaciones con conjuntos se definen usando estos conectivos lógicos.

El conectivo no ($\neq$) y el complemento

El conectivo "no" opera del siguiente modo: la proposición "no p" (simbolizado $\neg p$ o $\sim p$) es verdadera si p es falsa, y falsa si p es verdadera. En una tabla de verdad, esto se simboliza así:

p	$\neg p$
V	F
F	V

Es un conectivo unario. Esto significa que opera sobre una sola propoisición. Los demás conectivos son binarios (operan sobre dos proposiciones).

En el lenguaje de los conjuntos, la negación corresponde a la noción de complemento con respecto a un conjunto universal dado:

$$x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A \quad (x \text{no pertenece a } A)$$

Ej: si nuestro universal es el conjunto $\mathbb{N}$ de los naturales, y P es el conjunto de los pares, su complemento P^c es el conjunto de los impares.

El conectivo *y* ($\wedge$)

Estos conectivos se definen por medio de tablas de verdad. Por ejemplo, la proposición "p y q" (o en la notación usual de la lógica matemática $p \wedge q$), es verdadera cuando p y q sean verdaderas. Esto se expresa en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:
La proposición

"2 es un número par y 3 es un número par"

es falsa. En cambio la proposición

"2 es un número par y 6 es un número par"

es verdadera.

Intersección de conjuntos

El conectivo lógico $\wedge$ está ligado a la operación de intersección de conjuntos que se define así: un elemento x pertenece a la intersección $A \cap B$ de dos conjuntos A y B si y sólo si x está en A y x está en B. En símbolos:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Ejemplo:
Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \{2, 4\ \}$.

Puede ocurrir que dos conjuntos no tengan elementos en común. En ese caso se dice que son disjuntos y que su intersección es el conjunto vacío (el único conjunto sin elementos) que se denota $\emptyset$.

Ejemplo: Si $C = \{1, 2, 3\}$ y $D = 4, 6, 8$, $C \cap D = \emptyset$.

Dos significados de la pabra o

- El conectivo "o" merece un mayor cuidado, ya que debemos distinguir entre el "o excluyente" que excluye la posibilidad de que ambas afirmaciones sean verdaderas y el "o no-excluyente" que admite esta posibilidad. En el lenguaje cotidiano, "o" suele tomar el primero de estos significados.
- Por ejemplo cuando decimos

  "O vamos al cine, o vamos al teatro."

  damos por sentado que no podemos hacer ambas cosas a la vez.
- En cambio, en el lenguaje matemático, es más frecuente el uso del "o" en el sentido no exclusivo. Por ejemplo, la proposición

$$\text{Para todo par n,m de números naturales, } n \geq m \vee m \geq n$$

es verdadera. (¡aún si n y m fueran iguales!)

Los conectivo *o* no-excluyente ($\vee$) y *o* excluyente ($\veebar$)

La tabla de verdad de "p o q en el sentido no exclusivo" (simbolizado $p \vee q$) es

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

mientras que la de "p o q en el sentido exclusivo" (simbolizado $p \veebar q$) es

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Relación de estos conectivos con las operaciones de conjuntos

- El conectivo $\vee$ está asociado a la unión de conjuntos pues la definición de esta operación puede escribirse así:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$$

- En cambio, al conectivo $\veebar$ corresponde la operación de diferencia simétrica de conjuntos, cuya definición es:

$$x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in A \veebar x \in B$$

Ejemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad A \Delta B = \{1, 2, 5, 6\}$$

La implicación $\Rightarrow$

La implicación $p \Rightarrow q$ corresponde a la expresión "Si p, entonces q" en el lenguaje coloquial. En la lógica matemática $p \Rightarrow q$ se considera equivalente a $\neg p \vee q$ (es decir "o bien p es falsa, o sino q es verdadera").

En consecuencia la tabla de verdad de la implicación es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esta definición está justificada por la validez de la regla de inferencia conocida como Modus Ponens: si $p \Rightarrow q$ es verdadera, y p es verdadera, entonces q es verdadera.

Implicaciones y teoremas

La implicación es fundamental para la matemática porque se emplea en el enunciado de casi todos los teoremas.
Consideremos el siguiente teorema: "Para todo n natural, si n es par n^2 también es par"
Si queremos formalizar esto, vemos que tenemos dos funciones proposicionales

$$p(n) = n \text{ es par}$$

(hipótesis)

$$q(n) = n^2 \text{ es par}$$

(tesis) y nuestro teorema dice

$$\forall n \in \mathbb{N} : p(n) \Rightarrow q(n)$$

Acá aparece otro elemento fundamental en la lógica, el cuantificador universal $\forall$ (para todo).
Por ejemplo si $n = 2$, $p(2)$ es verdadera. Entonces el Modus Ponens nos permite deducir que $q(2)$ es verdadera [o sea que $2^2 = 4$ es par]. Mientras que si $n = 3$, $p(3)$ es falsa y no podemos deducir nada.

Paradojas de la implicación

Se deduce de la definción anterior que una proposición falsa implica lógicamente cualquier cosa. Por ejemplo,

`Si 2 es un número impar. entonces 10 es un número primo.`

se considera una proposición verdadera, aún cuando las propoisiciones

> *"2 es un número impar"*
>
> *"10 es un número primo"*

son ambas falsas. Esto puede parecer paradójico a primera vista, pero obsérvese que la tabla de verdad de $p \Rightarrow q$ significa que la única manera de demostrar que una implicación $p \Rightarrow q$ es falsa, es mostrando (un caso en el que) p es verdadera pero q es falsa. Por ejemplo para demostrar que la proposición

> *"Si un número entero n es par, entonces $n+1$ es par."*

es falsa, basta observar que si n es igual a 2 entonces p (n es par) resulta verdadera. pero q ($n+1$ es par) resulta falsa.

Implicaciones e inclusión de conjuntos

En el lenguaje de los cojuntos, el concepto asociado a la implicación es el de inclusión de comjuntos. Un conjunto A está incluido en el conjunto B, si para todo x si $x \in A$ entonces $x \in B$. En símbolos,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

Aquí $\forall x$ denota al cuantificador universal. “Para todo x”

Veamos algunos ejemplos:

- Si $A =$ múltiplos de 4 (en el universo de los números naturales) y $B =$ números pares, $A \subset B$ porque si un número x es múltiplo de 4, entonces es par.
- Si B es cualquier conjunto, $\emptyset \subseteq B$ (El conjunto vacío está contenido en cualquier conjunto).
  Para comprobarlo, notemos que para cualquier x, la proposición $x \in \emptyset$ es falsa. Y por la observación que hicimos antes,¡esto siempre implica que $x \in B$! (sin importar quien sea B).

Equivalencia Lógica ($\Leftrightarrow$)

Finalmente, intoduciremos el conectivo lógico $p \Leftrightarrow q$ significado de "p si y sólo si q", o "p es lógicamente equivalente a "q". Lo definimos como significando

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

En consecuencia, su tabla de verdad será:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Este conectivo corresponde a la igualdad entre conjuntos pues si A y B son conjuntos, decimos que son iguales cuando para cualquier elemento x, x pertenece a A si y sólo si x está en B.

$$A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

El cuantificador existencial

Otro tipo de teoremas que aparece con frecuencia son los teoremas de existencia.

"Existe n natural tal que n^2 es par"

Este tipo de afirmaciones se simboliza con el cuantificador existencial $\exists$ (existe)

$$\exists n \in \mathbb{N} : q(n)$$

Es importamte notar que la negación de un para todo es un existe, y la negación de un existe es un para todo

$$\neg(\forall x : p(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x : p(x)) \Leftrightarrow \forall x : \neg p(x)$$

Por ejemplo la negación del ejemplo anterior sería

"Para todo n natural, n^2 no es par."

Tautologías

Una tautología es una fórmula del cálculo proposicional que es verdadera, no importa cuáles sean los valores de verdad de las proposiciones que intervienen.

Con frecuencia, chequear la validez de una fórmula referida a varios conjuntos, es equivalente a verificar que una cierta fórmula del cálculo proposicional es una tautología.

Por ejemplo, consideremos una de las leyes de De Morgan de la Propoisición 1.1.6 del apunte de la materia

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Llamando p a la proposición $x \in A$, y q a la proposición $x \in B$ vemos que es equivalente a verificar que la fórmula

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

es una tautología.

Tautologías (2)

Podemos chequear que la siguiente fórmula (llamémosla T) es una tautología

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

mediante la siguiente tabla de verdad, donde se comprueban todos los casos:

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	T
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Bonus Track

Si quieren saber cómo generé la tabla anterior, lo hice mediante un pequeño programa en el lenguaje de programación Python (¡ustedes pueden usar su lenguaje favorito!). Lo pueden ver en

https://github.com/pdenapo/programitas-algebraI/blob/master/Python/2020/DeMorgan.py

Se deduce que comprobar o no la validez de una tautología puede realizarse mediante un algoritmo. Es decir un procedimiento mecánico que una computadora puede ejecutar.

Sin embargo, notemos que una tabla de verdad para una fórmula booleana con n variables proposicionales, tiene 2^n filas (hay que chequear 2^n casos posibles). ¡Este número crece muy rápido con n! Con lo que resulta poco práctico si el número de variables n es muy grande.