Control de la ecuación diferencial de Gompertz

Expositor: Carlos Héctor Daniel Alliera (Departamento de Matemática FCEN-UBA, mustufar1@yahoo.com.ar)
Autor/es: Carlos Héctor Daniel Alliera (Departamento de Matemática FCEN-UBA, mustufar1@yahoo.com.ar)

La siguiente ecuación con retardo, conocida como Ecuación de Gompertz [1], representa el crecimiento tumoral:

$$N'(t) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t-\tau)}\right) \tag{1}$$

De condición inicial $N(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0]$ para cierta $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$.
El equilibrio estable del sistema (1) es: $N_0^* = K$ donde $K > 0$ es la capacidad de carga y representa el tamaño máximo que puede alcanzar el tumor.
Para disminuir el valor de ese equilibrio se proponen modelos de control (en la práctica representan un tratamiento contra el tumor) como el siguiente:

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left\{\ln\left(\dfrac{K}{N(t-\tau)}\right) - cu(t)\right\} \\ u'(t) = -au(t) + b\ln(N(t)) \\ N(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau, 0], \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2}$$

en el cual los parámetros adicionales $a,\ b,\ c > 0$ y la función $\varphi \in C^1([-\tau, 0])$ es estrictamente positiva, y $u_0 > 0$.
El equilibrio del sistema con control ahora es:

$$\boxed{N_1^* = K^{\frac{a}{a+cb}} < K,\ u^* = \frac{b\log(K)}{a+cb}}$$

Buscaremos condiciones para determinar la estabilidad de este nuevo equilibrio mediante funcionales de Lyapunov.
Además, analizaremos numéricamente ejemplos de tumores como los que se muestran en [2] donde se evidencia el efecto de este control.

Referencias

[1] Gompertz, Benjamin, *On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies*,(1825).

[2] Laird, Anna Kane.*Dynamics of Tumor Growth*, British Journal of Cancer. 18 (3): pp 490–502 (1964).